Institut für Signalverarbeitung und Sprachkommunikation — Assoc.Prof. Dr. Klaus Witrisal
Technische Universität Graz

Prüfung zur Vorlesung Signaltransformationen am 4.5.2018

Name MatrNr. StudKennz.

Prüfungsdauer: 1 Stunde
Erreichbare Punkte: 10

Aufgabe 1 (1 Punkte)

Sei $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$ mit Amplitude $A \in \mathbb{R}$ und Kreisfrequenz ω_0.
(a) Skizzieren Sie den Realteil $\Re\{x(t)\}$, Imaginärteil $\Im\{x(t)\}$, Betrag $|x(t)|$ und Phase $\angle x(t)$ für den Bereich von einer Periode. Achten Sie auf Achsenbeschriftung!

(a) Kosinus, (b) Sinus, (c) Konstante mit Amplitude A, (d) Gerade mit Steigung ω_0; Zeitachse: eine Periode $= 2\pi/\omega_0$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Das zeitkontinuierliche, periodische Signal $x(t)$ besitzt eine Periodendauer von $T = 2$ und stimmt für $t \in [0, 2)$ mit folgendem Signal überein:

$$\tilde{x}(t) = \frac{t}{2}$$

(a) Skizzieren Sie das periodische Signal $x(t)$ für mindestens drei Perioden.
(b) Ist $x(t)$ eine gerade / ungerade Funktion (oder keines von beiden)? Darausfolgend, sind die dazugehörigen komplexen Fourier-Reihenkoeffizienten a_k rein reellwertig ($\Im\{a_k\} = 0$) / rein imaginärwertig ($\Re\{a_k\} = 0$) oder komplex ($a_k \in \mathbb{C}$)? weder gerade noch ungerade, daher $a_k \in \mathbb{C}$ weil $x(t)$ reell
(c) Nutzen Sie die Analysegleichung um die komplexen Fourier-Reihenkoeffizienten a_k zu berechnen. Sie können folgende Integrationsvorschrift verwenden.

$$\int xe^{cx}dx = \frac{e^{cx}}{c^2}(cx - 1).$$

verwenden. Bestimmen Sie den Koeffizienten a_0 separat. $a_k = \frac{j}{2k\pi}, k \neq 0, a_0 = 1/2$
(d) Sei nun

$$y(t) = x(t/2)$$

ein Signal mit halber Kreisfrequenz $\omega_0' = \omega_0/2$ und doppelter Periodenlänge $T' = 2T$, im Vergleich zu $x(t)$. Zeigen Sie, dass die dazugehörigen Fourier-Reihenkoeffizienten $b_k = a_k$ sich durch die Zeitskalierung nicht ändern. Tipp: Vergleichen Sie die Analysegleichungen durch Variablensubstitution! $a_k = 1/T \int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$, $b_k = 1/(T') \int_0^{T'} x(t/2)e^{-jk\omega_0' t}dt$, Substitution $u = t/2$ fuehrt zu $b_k = 1/(T') \int_0^{T'} x(u)e^{-jk2\omega_0' u}du = 1/(T) \int_0^{T} x(u)e^{-jk\omega_0 u}du = a_k$, weil egal ueber wieviele Perioden man integriert, solange die Skalierung beruecksichtigt wird.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

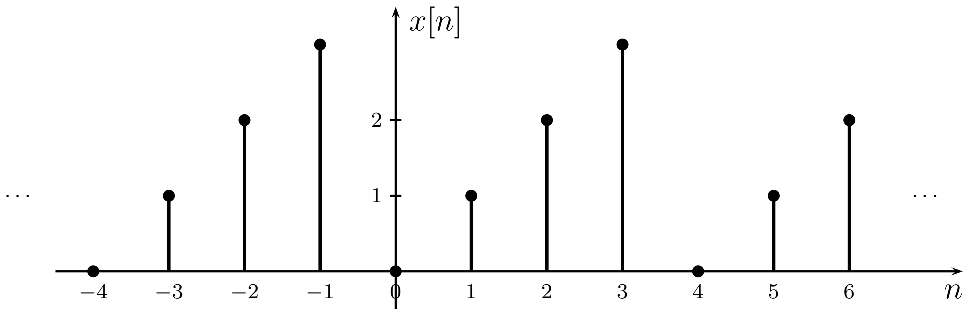
Gegeben sei das folgende, zeitkontinuierliche Signal:

$$x(t) = 2\cos^2(2\pi t) + \sin(2\pi t)$$

(a) Gesucht ist die Periodendauer von $x(t)$. $T = 1$
(b) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X(j\omega)$ des Signals. Zerlegen Sie, wenn nötig, $x(t)$ mit Hilfe der Eulerschen Identität.$X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - 4\pi) + \pi\delta(\omega + 4\pi) - j\pi\delta(\omega - 2\pi) + j\pi\delta(\omega + 2\pi)$
(c) Skizzieren Sie $X(j\omega)$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Wir betrachten ein zeitdiskretes, periodisches Signal $x[n]$:



(a) Bestimmen Sie die Periodendauer N von $x[n]$. $N = 4$
(b) Berechnen Sie die Koeffizienten a_k der zeitdiskreten Fourier-Reihe. Geben Sie die Koeffizienten a_k für $k = 0, \ldots, 3$ explizit an!$a_0 = 3/2, a_1 = (j-1)/2, a_2 = -1/2, a_3 = (-j-1)/2$
(c) Skizzieren Sie Real- und Imaginärteil der Koeffizienten a_k im Bereich $-2 \leq k \leq 1$. $a_{-2} = a_2, a_{-1} = a_3$