Definition 2.21. Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, messbare Räume, P_i ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω_i, $i = 1, \ldots, n$,

$$\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$$

(versehen mit $\mathcal{F} = \sigma\big(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n, A_i \in \mathcal{F}_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\big)$, der „Produkt-$\sigma$-Algebra), dann heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit

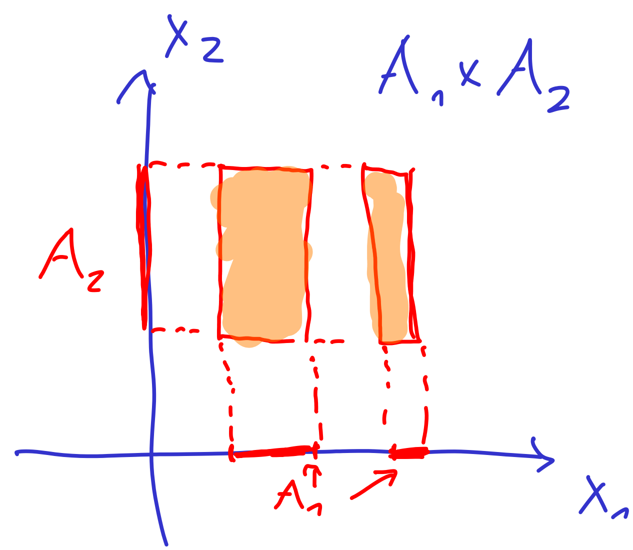
$$P\big(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\big) = \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i) \quad \text{für } A_1 \in \mathcal{F}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_n$$

das Produkt (oder Produktmaß) der $P_1, \ldots, P_n$, man schreibt

$$P = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_n$$

(im Fall $P_1 = P_2 = \cdots = P_n$ auch $P = P_1^{\otimes n}$).

$P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_n$



Bemerkung 2.22. ZVn $X_1, \ldots, X_n$ (mit Wertebereichen $S_1, \ldots, S_n$), die auf demselben W'raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiert sind unabhängig, g.d.w. gilt (mit $X = (X_1 \ldots, X_n)$)

$$\mathscr{L}_P(X) = \mathscr{L}_P(X_1) \otimes \mathscr{L}_P(X_2) \otimes \cdots \otimes \mathscr{L}_P(X_n).$$

(D.h. ZVn sind unabhängig g.d.w. die gemeinsame Verteilung (vgl. Beob. und Def. 1.33) ein Produktmaß ist).
Insbesondere: Unabhängigkeit von ZVn ist eine Eigenschaft der (gemeinsamen) Verteilung.

(Dazu: Produktmaß wie in Def. 2.21

mit Def. 2.15 vergleichen:

mit $B_i \subset S_i$ (messbar)

$$P(\{X_1 \in B_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \in B_n\}) = \mathscr{L}_P(X)(B_1 \times \ldots \times B_n)$$

$$= P(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in B_n)$$

$$= \mathscr{L}_P(X_1)(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathscr{L}_P(X_n)(B_n))$$

Beobachtung und Bericht 2.23 (Existenz von u.a. ZVn mit vorgegebenen Verteilungen). *$(S_i, \mathscr{A}_i)$ messbare Räume, μ_i W'maß auf $(S_i, \mathscr{A}_i)$ für $i = 1, \dots, n$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) oder für $i \in \mathbb{N}$.*

Dann gibt es (auf einem geeigeten W'raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) unabhängige ZVn $X_1, X_2, \dots$ mit $X_i \sim \mu_i$. Man kann $\cancel{\Omega = \times_{i=1}^n \Omega_i}$, $P = \bigotimes_{i=1}^n \cancel{P_i}$ μ_i (bzw. $\Omega = \times_{i=1}^\infty \cancel{\Omega_i}$ S_i, $P = \bigotimes_{i=1}^\infty \cancel{P_i}$ μ_i) und X_i = i-te Koordinatenprojektion wählen.

Diskussion. Wenn alle S_i abzählbar sind, folgt dies im Fall endlich vieler X_i aus Satz 2.18, im Fall unendlich vieler X_i aus Bericht 2.10.

Im Fall endlich vieler X_i mit Werten in $\mathbb{R}$, die jeweils eine Dichtefunktion f_i besitzen, folgt die Behauptung aus der Existenz des n-dim (Lebesgue-)Maßes („Volumen-Maß"), der Fall endlich oder unendlich vieler X_i mit Werten in $\mathbb{R}$ kann zudem (via Beob. 1.38 und Bericht 2.10) auf den diskreten Fall zurückgespielt werden:

Seien $U_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}$ u.a., $\mathrm{Ber}_{1/2}$, dann sind $V_i := \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} U_{i,j}$ u.a. (vgl. Beob. 2.16) und $V_i \sim \mathrm{Unif}_{[0,1]}$ für $i \in \mathbb{N}$. Sei F_i die Verteilungsfunktion von μ_i, dann leistet $X_i := F_i^{-1}(V_i)$ das Gewünschte (vgl. Beob. 1.38).

$\Omega = \times_{i=1}^n S_i$

$P = \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$

wähle dort

$P_{k|x_1, x_2, \dots, x_{k-1}}(x) = \mu_k(x)$, $x \in S_k$

für $k \in \mathbb{N}$

$x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$, $\dots$, $x_{k-1} \in S_{k-1}$

2.4 Faltung

Definition 2.24. X und Y unabhängige reellwertige ZVn, $X \sim \mu$, $Y \sim \nu$ (definiert auf einem W'raum). Die Verteilung von $X+Y$ heißt die *Faltung* von μ und ν, geschrieben $\mu * \nu$:

$$(\mu * \nu)(B) = P(X+Y \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$$

(alternativ: $\mu * \nu = \underbrace{(\mu \otimes \nu)}_{\mathcal{L}((X,Y))} \circ f^{-1}$ mit $f(x,y) = x+y$).

Bemerkung. $\mu * \nu = \nu * \mu$ (denn $X+Y = Y+X$).

Beobachtung 2.25 (Diskreter Fall)**.** Falls $\mu(\mathbb{Z}) = \nu(\mathbb{Z}) = 1$ (d.h. X und Y haben Werte in $\mathbb{Z}$), so ist für $k \in \mathbb{Z}$

$$(\mu * \nu)(\{k\}) = P(X+Y=k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \underbrace{P(X=m, Y=k-m)}_{} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu(\{m\})\nu(\{k-m\}).$$

$$\left(= P(X=m, X+Y=k) \right)$$

$$= P(X=m)P(Y=k-m)$$

(Im allgemeinen diskreten Fall $P(X \in \{x_i : i \in \mathbb{N}\}) = 1$, $P(Y \in \{y_j : j \in \mathbb{N}\}) = 1$ ist

$$P(X+Y=z) = \sum_{(i,j):\, x_i+y_j=z} P(X=x_i)P(Y=y_j) \;)$$

Beispiel 2.26. 1. X, Y u.a., $\sim \mathrm{Ber}_p$, so ist $X + Y \sim \mathrm{Bin}_{2,p}$, d.h. $\mathrm{Ber}_p * \mathrm{Ber}_p = \mathrm{Bin}_{2,p}$.

$P(X+Y=0) = (1-p)^2$, $P(X+Y=1) = p(1-p)+(1-p)p = 2p(1-p)$, $P(X+Y=2) = p^2$

2. (Binomialfamilie) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.a., $\sim \mathrm{Ber}_p$, so ist $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$, d.h.

$$\mathrm{Ber}_p^{*n} = \underbrace{\mathrm{Ber}_p * \mathrm{Ber}_p * \cdots * \mathrm{Ber}_p}_{n\text{-mal}} = \mathrm{Bin}_{n,p}.$$

$P(X_1+\ldots+X_n=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{Bin}_{n_1,p} * \mathrm{Bin}_{n_2,p} = \mathrm{Bin}_{n_1+n_2,p} \quad \text{für } p \in [0,1], n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

die Binomialverteilungen bilden (für festes p) eine *Faltungsfamilie*.

$X_1, X_2, \ldots, X_{n_1+n_2}$ u.i.v. $\sim \mathrm{Ber}_p$ und $\underbrace{X_1+\ldots+X_{n_1+n_2}}_{= (X_1+\ldots+X_{n_1}) + (X_{n_1+1}+\ldots+X_{n_1+n_2})} \sim \mathrm{Bin}_{n_1+n_2,p}$

u.a. Summanden

3. (Poissonfamilie) Für $\alpha, \beta > 0$ ist $\mathrm{Poi}_\alpha * \mathrm{Poi}_\beta = \mathrm{Poi}_{\alpha+\beta}$

(auch die Poissonverteilungen bilden eine *Faltungsfamilie*)

$$(\mathrm{Poi}_\alpha * \mathrm{Poi}_\beta)(\{k\}) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ (0\le m\le k)}} \mathrm{Poi}_\alpha(\{m\})\,\mathrm{Poi}_\beta(\{k-m\})$$

$$= \sum_{m=0}^{k} e^{-\alpha}\frac{\alpha^m}{m!}\cdot e^{-\beta}\frac{\beta^{k-m}}{(k-m)!} = \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{k!}\underbrace{\sum_{m=0}^{k} \overbrace{\frac{k!}{m!(k-m)!}}^{=\binom{k}{m}} \alpha^m\cdot\beta^{k-m}}_{=(\alpha+\beta)^k}$$

$$= \mathrm{Poi}_{\alpha+\beta}(\{k\})$$

Beobachtung 2.27 (Faltung von Dichten)**.** X, Y u.a. reellwertige ZVn mit Dichte f_X bzw. f_Y, so hat $X + Y$ die Dichte

$$(f_X * f_Y)(z) := \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z - x)\, dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Sei $w \in \mathbb{R}$

$$P(X+Y \leq w) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x+y \leq w\}} f_X(x) f_Y(y)\, dy\, dx$$

substituiere $y = z - x$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{1}_{\{x+z-x \leq w\}}}_{= \mathbb{1}_{\{z \leq w\}}} f_X(x) f_Y(z-x)\, dz\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{z \leq w\}} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{z \leq w\}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx \right)}_{= (f_X * f_Y)(z)} dz$$

$\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ hat Dichte $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Beispiel 2.28 (Die Normalverteilungen bilden eine Faltungsfamilie)**.** Es gilt

$$\mathcal{N}_{\mu_1,\sigma_1^2} * \mathcal{N}_{\mu_2,\sigma_2^2} = \mathcal{N}_{\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2} \quad \text{für } \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma_1, \sigma_2 > 0$$

Beweis. Betrachte o.E. den Fall $\mu_1 = \mu_2$ $= 0$ (denn $Z \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$, $a \in \mathbb{R}$, so ist $Z + a \sim \mathcal{N}_{\mu+a,\sigma^2}$):

Für $z \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\Big) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\Big(-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}\Big)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\Big(-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\Big) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\big(2\pi\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\big)^{1/2}} \exp\Big(\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{z^2}{2\sigma_2^2} + \frac{zx}{\sigma_2^2} - \frac{x^2}{2\sigma_2^2}\Big)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\Big(-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\Big) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\big(2\pi\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\big)^{1/2}} \exp\Bigg(-\frac{\big(x - \frac{z}{1+(\sigma_2/\sigma_1)^2}\big)^2}{2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\Bigg)\, dx}_{=1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\Big(-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\Big).$$

(Nebenrechnung: Das Argument der Exponentialfunktion innerhalb des Integrals in der 2. Zeile ist

$$\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{z^2}{2\sigma_2^2} + \frac{zx}{\sigma_2^2} - \frac{x^2}{2\sigma_2^2} = -\frac{1}{2}\big(\sigma_1^{-2}+\sigma_2^{-2}\big)\Big(x^2 - \frac{2xz}{\sigma_2^2(\sigma_1^{-2}+\sigma_2^{-2})} + \underbrace{\Big(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\Big)\big(\sigma_1^{-2}+\sigma_2^{-2}\big)^{-1}}_{=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)(\sigma_1^{-2}+\sigma_2^{-2})} = \frac{1}{\sigma_1^4}\frac{1}{(\sigma_1^{-2}+\sigma_2^{-2})^2}} z^2\Big)$$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{\big(\sigma_1^{-2}+\sigma_2^{-2}\big)}_{=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\Big(x - \frac{z}{1+(\sigma_2/\sigma_1)^2}\Big)^2,$$

das Integral in der 2. Zeile ist $\mathcal{N}_{z/(1+(\sigma_2/\sigma_1)^2),\sigma_1^2\sigma_2^2/(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}(\mathbb{R}) = 1$.) $\square$

Bemerkung. Man kann anstelle obiger expliziter Rechnung auch mit orthogonalen Transformationen und Beispiel 2.20, 1. (Invarianz der multi-dimensionalen Standard-Normalverteilung unter orthogonalen Transformationen) argumentieren, vgl. auch [KW, Bsp. auf S. 71]:

Seien $a, b \in (0,1)$ mit $a^2 + b^2 = 1$, so ist die 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ orthogonal, seien Z_1, Z_2 u.a., $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, dann haben

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aZ_1 + bZ_2 \\ -bZ_1 + aZ_2 \end{pmatrix}$$

dieselbe Verteilung, d.h. auch $aZ_1 + bZ_2$ und $-bZ_1 + aZ_2$ sind u.i.v., $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, insbesondere ist $aZ_1 + bZ_2$ standardnormalverteilt.

Setzen wir $a := \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$, $b := \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$, so finden wir: $X_1 := \sigma_1 Z_1 \sim \mathcal{N}_{0,\sigma_1^2}$, $X_2 := \sigma_2 Z_2 \sim \mathcal{N}_{0,\sigma_2^2}$ (und X_1, X_2 sind u.a.),

$$\frac{X_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} + \frac{X_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} = aZ_1 + bZ_2 \sim \mathcal{N}_{0,1},$$

(und $Z \sim \mathcal{N}_{0,1}$, so ist $\sigma Z \sim \mathcal{N}_{0,\sigma^2}$)

also gilt $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

2.5 Asymptotische Ereignisse

In diesem Abschnitt geht es um Ereignisse, die gewissermaßen (wenn man bei der Nummerierung an einen Zeitablauf denkt) „unendlich spät“ entschieden werden.

Definition 2.29. Seien $A_1, A_2, \ldots$ Ereignisse,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m$$

(„unendlich viele der A_n treten ein“),

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} A_m$$

(„von einem (möglicherweise zufälligen) Index ab treten alle A_n ein“).

Beachte: Es ist $\left(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n\right)^c = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n^c$, mit Indikatorvariablen ausgedrückt gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(\omega), \quad \liminf_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \mathbf{1}_{\liminf_n A_n}(\omega).$$

Satz 2.30 (Lemma von Borel-Cantelli[3]). *Seien* $A_1, A_2, \ldots$ *Ereignisse,* $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$. $\left(= \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} A_m\right)$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P(A) = 0$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ *und die* $A_1, A_2, \ldots$ *seien unabhängig* $\implies P(A) = 1$

denn:

1. $$P(A) \leq P\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2. $$P(A^c) = P\left(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} A_m^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P\left(\bigcap_{m\geq n} A_m^c\right)}_{= \lim_{k\to\infty} \underbrace{P\left(\bigcap_{m=n}^{k} A_m^c\right)}_{= \prod_{m=n}^{k} \underbrace{(1-P(A_m))}_{\leq e^{-P(A_m)}}}}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lim_{k\to\infty} e^{-\sum_{m=n}^{k} P(A_m)}}_{=0}$$

$$= 0$$

[3] nach Émile Borel (1871–1956) und Francesco Cantelli (1875–1966)

Beispiel 2.31. 1. Betrachte unendlich iterierten (unabhängigen) p-Münzwurf ($p \in (0,1]$), sei

$$A_n = \{\text{Erfolg im } n\text{-ten Wurf}\},$$

denn $P(A_n) = p > 0$ $\forall n$, somit $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$

dann ist $P(\limsup_n A_n) = 1$, d.h. es treten fast sicher ∞ viele Erfolge auf.

2. Seien $X_1, X_2, \ldots$ ZVn, $X_n \sim \mathrm{Poi}_{\lambda_n}$ mit $\sup_n \lambda_n =: \Lambda < \infty$, $A_n = \{X_n \geq n\}$. Es ist

$$P(A_n) = e^{-\lambda_n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda_n)^k}{k!} \leq e^{-\Lambda} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!}$$

(verwende z.B. Bsp 2.26, 3. zur Poisson-Faltungseigenschaft, um dies einzusehen: Falls $\lambda_n < \Lambda$, sei Y_n u.a. von X_n, $\sim \mathrm{Poi}_{\Lambda - \lambda_n}$, dann ist $X_n + Y_n \sim \mathrm{Poi}_\Lambda$ und somit $P(X_n \geq n) \leq P(X_n + Y_n \geq n)$). Somit

$$\sum_n P(A_n) \leq e^{-\Lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} \sum_{1 \leq k \leq n} = \underbrace{e^{-\Lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} k}_{=\Lambda} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \geq n} e^{-\Lambda} \frac{\Lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} e^{-\Lambda} \frac{\Lambda^k}{k!}$$

also $P(\limsup_n A_n) = 0$.

(Beachte: die X_n brauchen nicht unabhängig zu sein.)

Anmerkung: Wenn $A_1, A_2, \ldots$ nicht unabhängig sind, so folgt aus $\sum_n P(A_n) = \infty$ i.A. keine Aussage über $P(\limsup_n A_n)$.

„Extrembsp.": A Ereignis mit $P(A) \in (0,1)$, setze $A_n = A$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \limsup A_n = A$