Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla

Logik
Aufgabenblatt 3 (Abgabe)

TU Kaiserslautern
Sommersemester 2016

Ausgabe: 04. Mai Abgabe: 13. Mai

Werfen Sie Ihre Lösung bis Freitag, 13. Mai, um **12:00** in die Abgabekästen im 4. Stock von Gebäude 34. Geben Sie **zu dritt** ab.

Aufgabe 1: Deduktive Systeme

a) Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels jeweils **beide** Richtungen der folgenden Äquivalenzen:

- $A \in F$ ist erfüllbar gdw. $\neg A$ unerfüllbar ist.
- $A \in F$ ist eine Tautologie gdw. $\neg A$ unerfüllbar ist.

Die Eigenschaft „unerfüllbar" wurde in der Vorlesung auch „widerspruchsvoll" genannt.

b) In Lemma 1.11 haben Sie gesehen, dass die Modus-Ponens-Regel angewandt auf Tautologien eine Tautologie erzeugt. Um die Korrektheit von $\mathcal{F}_0$ zu zeigen (d.h. alle in $\mathcal{F}_0$ beweisbaren Aussagen sind Tautologien) müssen wir noch zeigen, dass die Axiome von $\mathcal{F}_0$ Tautologien sind. Das heißt: Zeigen Sie, dass für alle $A, B, C \in F$ die Formeln

$$\begin{aligned}
\text{Ax1} &\equiv A \to (B \to A)\\
\text{Ax2} &\equiv \big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)\\
\text{Ax3} &\equiv (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)
\end{aligned}$$

Tautologien sind.

c) Beweisen Sie Lemma 2.4, Punkt 1:
In einem beliebigen deduktiven System $\mathcal{F}$ gilt $A \in T(\mathcal{F})$ genau dann wenn es einen Beweis für A gibt.
Beweisen Sie eine Richtung durch Induktion über die Struktur von $T(A)$ und die andere Richtung durch Induktion über die Länge n eines Beweises $B_1, ..., B_n$.

Aufgabe 2: Normalformen und Erfüllbarkeit

Ein **Literal** L ist eine Formel der Form p oder $\neg p$, wobei p eine Aussagenvariable ist. Eine **Coklausel** K ist eine Konjunktion von Literalen, $K \equiv L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$. Eine Formel F ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, wenn sie eine Disjunktion von Coklauseln ist, d.h. $F \equiv K_1 \vee \cdots \vee K_m$.

a) Beschreiben Sie ein Verfahren, dass unter Verwendung einer Wertetabelle zu einer Formel A in F eine logisch äquivalente Formel B in DNF erzeugt.

b) Das Überprüfen von Erfüllbarkeit ist das wichtigste algorithmische Problem der Aussagenlogik. Geben Sie ein Verfahren an, dass für eine Formel in DNF schnell entscheidet, ob sie erfüllbar ist.

c) Man glaubt, dass es kein schnelles Verfahren zum Überprüfen von Erfüllbarkeit gibt. Warum ist der folgende Algorithmus kein schnelles Verfahren zum Überprüfen von Erfüllbarkeit?

- Finde zur gegebenen Formel A eine logisch äquivalente Formel B in DNF mit a).
- Entscheide, ob B erfüllbar ist mit b).

Aufgabe 3: Kompaktheitssatz

Es sei $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette von erfüllbaren Formelmengen.

a) Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\Sigma = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$ erfüllbar ist genau dann wenn für alle $i \in \mathbb{N}$ die Menge Σ_i erfüllbar ist.

b) Gilt a) auch, wenn $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$ einfach nur eine Folge von erfüllbaren Formelmengen und keine Kette ist (d.h. es gilt nicht unbedingt $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$) ?

Aufgabe 4: Vollständige Junktorenmengen

Für eine Menge M von Junktoren sei $F(M)$ die Menge der Formeln, in denen nur Junktoren aus M vorkommen. Zum Beispiel ist die Menge aller aussagenlogischer Formeln $F\left(\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}\right)$. Eine Menge M von Junktoren heißt **vollständig**, wenn es für jede Formel $A \in F$ eine logisch äquivalente Formel $B \in F(M)$ gibt.

a) Wir wollen zeigen, dass die Menge $F(\{\vee, \wedge\})$ nur erfüllbare Formeln enthält. Erklären Sie, warum es schwierig ist, direkt per Induktion zu zeigen, dass jede Formel in $F(\{\vee, \wedge\})$ erfüllbar ist.

b) Stattdessen müssen wir eine stärkere Aussage per Induktion beweisen:
Finden Sie eine Belegung der Variablen φ, die alle Formeln in $F(\{\vee, \wedge\})$ erfüllt und beweisen Sie diese Eigenschaft durch Induktion.

c) Schließen Sie aus b), dass $\{\vee, \wedge\}$ keine vollständige Operatorenmenge ist.

d) Sei $\bar{\wedge}$ („NAND“) ein Junktor, so dass für alle Formeln A,B und alle Bewertungen φ gilt:

$$\varphi(A \mathbin{\bar{\wedge}} B) = 1 - \min\left\{\varphi(A), \varphi(B)\right\} \left(= \varphi\left(\neg(A \wedge B)\right)\right) .$$

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass die Menge $\{\bar{\wedge}\}$ eine vollständige Junktorenmenge ist.