Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla

Logik
Aufgabenblatt 10 (Präsenz)

TU Kaiserslautern
Sommersemester 2016

Ausgabe: 22. Juni — Bearbeitung: 23./24. Juni

Aufgabe 1: Semi-Entscheider

Es sei Σ ein Alphabet und Σ^* die Menge der Wörter über Σ. Ein **Semi-Entscheider** für eine Menge $M \subseteq \Sigma^*$ ist ein Algorithmus, der eine Eingabe $x \in \Sigma^*$ erhält und

- terminiert und „ja" antwortet, falls $x \in M$,
- nicht terminiert, falls $x \notin M$.

Ein **Entscheider** für M ist dagegen ein Algorithmus, der eine Eingabe $x \in \Sigma^*$ erhält, **in jedem Fall terminiert** und dabei

- mit „ja" antwortet, falls $x \in M$,
- mit „nein" antwortet, falls $x \notin M$.

Wenn es für M einen (Semi-)Entscheider gibt, nennen wir M **(semi-)entscheidbar**.

Das Komplement $\overline{M}$ ist definiert als $\Sigma^* \setminus M$.

Zeigen Sie:

a) Beachten Sie, dass gemäß unserer Definition ein Semi-Entscheider nicht terminieren darf, wenn $x \notin M$ gilt. Wir erlauben nun einem Semi-Entscheider zusätzlich, mit „nein" zu antworten, falls $x \notin M$. Zeigen Sie, dass ein Problem semi-entscheidbar ist, genau dann wenn es einen solchen Semi-Entscheider gibt.

b) Wenn M entscheidbar ist, sind M und $\overline{M}$ semi-entscheidbar.

c) Wenn M und $\overline{M}$ semi-entscheidbar sind, ist M entscheidbar.

Aufgabe 2: Unentscheidbarkeit von Erfüllbarkeit

a) Zeigen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist:

Gegeben: Eine Signatur S, in der jedes Prädikatensymbol höchstens zweistellig ist und eine Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$.
Frage: Ist A erfüllbar?

b) Zeigen Sie, dass das folgende Problem nicht semi-entscheidbar ist:

Gegeben: Eine Signatur S und eine Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$.
Frage: Ist A erfüllbar?

Aufgabe 3: Semi-Entscheidbarkeit von Erfüllbarkeit und Äquivalenz

Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar sind:

a) Gegeben: Eine prädikatenlogische Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$ (für eine Signatur S).
   Frage: Ist A unerfüllbar?

b) Gegeben: Prädikatenlogische Formeln $A, B \in \mathrm{FO}(S)$.
   Frage: Gilt $A \models\!\mid B$?

Aufgabe 4: Reduktionen

Es sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Problemen und $A \subseteq \Sigma^*, B \subseteq \Gamma^*$ Probleme. Wir erinnern uns daran, dass A **many-one-reduzierbar** auf B ist, wenn es eine totale und berechenbare Funktion $r : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $x \in A$ gdw. $r(x) \in B$. A heißt $\mathcal{C}$**-schwer**, wenn jedes Problem aus $\mathcal{C}$ auf A many-one-reduzierbar ist.

Zeigen Sie:
Ist A ein $\mathcal{C}$-schweres Problem und A auf B many-one-reduzierbar, dann ist auch B ein $\mathcal{C}$-schweres Problem.

Wie wurde diese Aussage in der Vorlesung verwendet?