Prof. Dr. Roland Meyer	**Logik**	
	Aufgabenblatt 14 (Präsenz)	TU Kaiserslautern
Sebastian Muskalla		Sommersemester 2016

Ausgabe: 20. Juli — Bearbeitung: 21./22. Juli

Aufgabe 1: Tableaux

Zeigen Sie mit der (prädikatenlogischen) Tableaux-Methode, dass die folgende Formel unerfüllbar ist. Dabei sind p und q einstellige Prädikatssymbole.

$$\neg\Big(\big[\big(\exists x\big[: p(x) \wedge q(x)\big]\big) \rightarrow \big(\big[\exists x\colon p(x)\big] \wedge \big[\exists y\colon q(y)\big]\big)\big] \wedge \big[\big(\big[\exists x\colon p(x)\big] \wedge \big[\forall y\colon q(y)\big]\big) \rightarrow \big(\exists z\colon p(z) \wedge q(z)\big)\big]\Big)$$

Aufgabe 2: Resolution

a) Berechnen Sie füur die folgenden drei Formeln einen allgemeinsten Unfikator (MGU) θ. Wenden Sie dabei den Unifizierungsalgorithmus aus der Vorlesung Schritt für Schritt an. Geben Sie sowohl eine geschlossene Darstellung für θ als auch die unifizierte Formel $A\theta$ an.

$$\begin{aligned} A &\equiv p\big(x,\ f(x),\ h(y)\big) \\ B &\equiv p\big(g(z,a),\ y,\ w\big) \\ C &\equiv p\big(g(b,u),\ f(s),\ h(f(s))\big) \end{aligned}$$

(Dabei sind x, y, z, w, u, s Variablen, p ein Prädikatssymbol und f, h, g, a, b Funktionssymbole.)

b) Zeigen Sie unter Verwendung der (prädikatenlogischen) Resolventenmethode, dass die folgende Formel unerfüllbar ist. Bringen Sie die Formel dafür zunächst in eine geeignete Form.

$$\exists z \forall x \forall y\colon \big(p(y) \rightarrow q(x,x)\big) \wedge \big(q(x,y) \rightarrow r(y)\big) \wedge \big(p(z)\big) \wedge \big(\neg r(z) \vee \neg p(z)\big)$$

(Dabei sind p, q, r Prädikatssymbole.)

Aufgabe 3: Mehr Resolution

Zeigen Sie, dass die Formel

$$\big(\forall y\colon q(y)\big) \vee \neg\forall x\colon \big(\big[q(x) \vee r(x)\big] \wedge \exists z\colon \big[\neg p(z) \wedge \big(p(z) \vee \neg r(x)\big)\big]\big)$$

eine Tautologie ist. Dies bedeutet, dass Sie

(1) die Formel negieren,

(2) das Ergebnis in Klauselnormalform bringen

(3) auf die Formel in Klauselnormalform das Resolutionsverfahren anwenden.

Aufgabe 4: Lifting-Lemma

In der Vorlesung haben wir angenommen, dass die Klauseln, die wir in einem Resolutionsschritt nutzen, variablen-disjunkt sind. Wir zeigen nun, dass diese Annahme wirklich nötig ist und dass wir sie durch eine geeignete Umbennenung erzwingen können.

a) Argumentieren Sie, dass Sie ohne Variablenumbenennung nicht mittels Resolution zeigen können, dass die Formel

$$A \equiv \forall x\colon p(x) \wedge \neg p(f(x))$$

unerfüllbar ist.

b) In der Vorlesung wurde das Lifting-Lemma für den Fall bewiesen, dass die Klauseln K_1 und K_2 variablen-disjunkt sind. Wir zeigen nun den allgemeinen Fall, sie dürfen dabei die in die Vorlesung gezeigte Spezialversion verwenden.

Seien K_1 und K_2 Klauseln und K_1' und K_2' Grundinstanzen dieser Klauseln (d.h. aussagenlogische Formeln, die durch eine Grundsubstitution, also das Ersetzen aller Variablen in K_i durch Terme, entstehen) und sei R' eine (aussagenlogische) Resolvente von K_1' und K_2'. Dann gibt es eine (prädikatenlogische) Resolvente R von K_1 und K_2, so dass R' eine Grundinstanz von R ist.

Hinweis: In den Vorlesungsfolien sind Resolventen nur für variablen-disjunkte Klauseln definiert. Verwenden Sie zum Bearbeiten dieser Aufgabe die Definition aus den Notizen zu Resolution auf der Homepage.

c) Begründen Sie, dass durch das Umbenennen die Korrektheit des Verfahrens nicht negativ beeinträchtigt wird. Zeigen Sie dazu exemplarisch, dass die Formel

$$\forall x \forall y\colon p(x) \wedge \neg p(f(x)) \wedge p(y) \wedge \neg p(f(y))$$

logisch äquivalent zur Formel A aus Aufgabenteil a) ist.