Prof. Dr. Roland Meyer Sebastian Muskalla, Peter Chini	**Theoretische Informatik II** **Aufgabenblatt 5**	TU Braunschweig Sommersemester 2017

Ausgabe: 31. Mai — Abgabe: 15. Juni

Werfen Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 15. Juni, 12:00 Uhr in die Abgabekästen im Informatikzentrum neben Büro 343. Geben Sie zu dritt oder zu viert ab.

Auf diesem Aufgabenblatt genügt es, das Verhalten von Turing-Maschinen informell zu beschreiben.

Aufgabe 1: Universalität und Totalität

Das Universalitätsproblem ist das folgende Entscheidungsproblem.

Universalitätsproblem (UNIVERSALITY)	
Gegeben:	Turing-Maschine M
Entscheide:	Akzeptiert M alle Eingaben?

Dieses Problem lässt sich als folgende Sprache auffassen:

$$\mathcal{L}_{\text{Universality}} = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; M_w \text{ akz. alle Eingaben } x \right\} = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \mathcal{L}(M_w) = \{0,1\}^* \right\}.$$

a) Zunächst sollen Sie zeigen, dass $\mathcal{L}_{\text{Universality}}$ nicht co-semi-entscheidbar ist. Betrachten Sie hierzu das Komplementproblem $\overline{\mathcal{L}_{\text{Universality}}} = \{0,1\}^* \setminus \mathcal{L}_{\text{Universality}}$.

   Beschreiben Sie zunächst diese Sprache. Was bedeutet es für die Maschine M_w, wenn $w \in \overline{\mathcal{L}_{\text{Universality}}}$ gilt?

   Reduzieren Sie ein Problem, von dem bekannt ist, dass es nicht semi-entscheidbar ist auf $\overline{\mathcal{L}_{\text{Universality}}}$.

   Hinweis: Die Halte- und Akzeptanzprobleme, die wir kennen gelernt haben, sind semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar. Gemäß Aufgabe 1b) des 3. Übungsblattes sind sie also nicht co-semi-entscheidbar.

b) Das Universalitätsproblem ist eng verwandt mit dem in der Vorlesung erwähnten Totalitätsproblem.

Totalitätsproblem (TOTALITY)	
Gegeben:	Turing-Maschine M
Entscheide:	Hält M auf allen Eingaben?

   Formalisieren Sie das Totalitätsproblem als Sprache $\mathcal{L}_{\text{Totality}} \subseteq \{0,1\}^*$.

   Eine Turing-Maschine ist eine Ja-Instanz des Totalitätsproblems genau dann, wenn sie ein Entscheider ist.

Was ist vom folgenden Beweis zu halten?

„Entscheidbar zu sein ist eine nicht-triviale Eigenschaft der semi-entscheidbaren Sprachen. Der Satz von Rice zeigt daher, dass $\mathcal{L}_{\text{Totality}}$ nicht entscheidbar sein kann.“

Aufgabe 2: Nicht-Semi-Entscheidbarkeit von Universalität

Nun wollen wir beweisen, dass das Universalitätsproblem nicht semi-entscheidbar ist. (Mit Aufgabe 1a) ist es also weder semi- noch co-semi-entscheidbar.)

a) Es sei $M = (Q, \{0, 1\}, \{0, 1, \$, \sqcup\}, \delta, q_0)$ eine DTM.

Eine akzeptierende Berechnung von M lässt sich als Wort kodieren, in dem man die Konfigurationen der Berechnung mit #-Symbolen getrennt hintereinander schreibt, also

$$c_0\#c_1\#c_2\#\ldots\#c_k\,.$$

Geben Sie an, wie man einen Entscheider M' konstruiert, welcher die Kodierung einer solchen Berechnung genau dann akzeptiert, wenn es sich nicht um eine akzeptierende Berechnung von M zur Eingabe ε handelt.

Hinweis: Eine Eingabe für M' kann entweder keine valide Kodierung einer Berechnung, oder eine akzeptierende, oder eine nicht-akzeptiertende Berechnung sein.

b) Betrachten Sie das folgende Entscheidungsproblem.

Nichtakzeptanz von ε	
Gegeben:	Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$
Entscheide:	Akzeptiert M Eingabe ε nicht?

Beweisen Sie, dass dieses Problem nicht semi-entscheidbar ist.

Hinweis: Hierzu müssen Sie keine Reduktion verwenden.

c) Beweisen Sie, dass das Universalitätsproblem aus Aufgabe 1a) nicht semi-entscheidbar ist.

Reduzieren Sie hierzu das Problem aus Aufgabe b).

Beachten Sie: Wenn eine Maschine M Eingabe ε nicht akzeptiert, dann ist die entsprechende Maschine M' aus Aufgabenteil a) universell.

Aufgabe 3: Landau-Notation
Rufen Sie sich die Landau-Notation in Erinnerung.

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Wir definieren die folgenden Mengen von Funktionen:

$$\begin{aligned}
\Theta(g) &= \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \;\middle|\; \exists n_0 \in \mathbb{N}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0} \colon \forall n \geq n_0 : c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \right\} , \\
\mathcal{O}(g) &= \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \;\middle|\; \exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0} \colon \forall n \geq n_0 \colon f(n) \leq c \cdot g(n) \right\} , \\
\Omega(g) &= \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \;\middle|\; \exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0} \colon \forall n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n) \right\} .
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie formal, dass die folgende Gleichheit gilt:

$$\Theta(g) = \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g) .$$

b) Zeigen Sie, dass die Enthaltenseinsrelation für Θ symmetrisch ist, für zwei Funktionen $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ also gilt

$$f \in \Theta(g) \text{ gdw. } g \in \Theta(f) .$$

c) Zeigen Sie, dass die Enthaltenseinsrelation für $\mathcal{O}$ nicht symmetrisch ist. Geben Sie also Funktionen $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f \in \mathcal{O}(g)$, aber $g \notin \mathcal{O}(f)$ an. Begründen Sie kurz, warum die von Ihnen angegebenen Funktionen die gewünschte Eigenschaft haben.

Aufgabe 4: Komplexität von COPY
Wir definieren die Sprache

$$\text{COPY} = \left\{ w\#w \;\middle|\; w \in \{0,1\}^* \right\} \subseteq \{0,1,\#\}^* .$$

a) In Aufgabe 2b) des 2. Übungsblatts haben Sie einen Entscheider M für COPY kennen gelernt. Es handelte sich hierbei um eine deterministische 1-Band-Turing-Maschine. Analysieren Sie den Zeitverbrauch dieser Maschine, bestimmen Sie also möglichst präzise eine Funktion $t \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die den Zeitverbrauch von M beschränkt.

b) Geben Sie eine deterministische 2-Band Turing-Maschine an, die COPY mit linearem Zeitverbrauch, also in $\mathcal{O}(n)$ vielen Schritten, entscheidet.

   Bemerkung: Man kann beweisen, dass es mit einer 1-Band-DTM nicht möglich ist, COPY in linearer Zeit zu entscheiden.

c) Geben Sie eine deterministische Turing-Maschine an, die COPY mit logarithmischem Platzverbrauch, also mit $\mathcal{O}(\log n)$ viel Platz, entscheidet.

   Erinnerung: Hierfür betrachten wir Maschinen, deren Eingabeband read-only ist.