Übungen zur Vorlesung
Theoretische Informatik II
Blatt 4

Prof. Dr. Roland Meyer, M. Sc. Elisabeth Neumann Abgabe bis 30.05.2018 um 12:00

Aufgabe 4.1 (Reduktionen)

a) Das Universalitätsproblem ist das folgende Entscheidungsproblem.

> Universalitätsproblem (UNIVERSALITY)
> **Gegeben:** Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0,1\}$
> **Entscheide:** Akzeptiert M alle Eingaben?

Dieses Problem lässt sich als folgende Sprache auffassen:

$\mathcal{L}_{\text{Universality}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ akz. alle Eingaben } x\} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathcal{L}(M_w) = \{0,1\}^*\}$.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_{\text{Universality}}$ nicht co-semi-entscheidbar ist. Betrachten Sie hierzu das Komplementproblem $\overline{\mathcal{L}_{\text{Universality}}} = \{0,1\}^* \setminus \mathcal{L}_{\text{Universality}}$.

Beschreiben Sie zunächst diese Sprache. Was bedeutet es für die Maschine M_w, wenn
$w \in \overline{\mathcal{L}_{\text{Universality}}}$ gilt?

Reduzieren Sie ein Problem, von dem bekannt ist, dass es nicht semi-entscheidbar ist auf $\overline{\mathcal{L}_{\text{Universality}}}$.

Hinweis: Die Halte- und Akzeptanzprobleme, die wir kennen gelernt haben, sind semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar. Gemäß Theorem 3.20 im Skript sind sie also nicht co-semi-entscheidbar.

b) Beweisen Sie, dass die folgende Sprache unentscheidbar ist, indem Sie ein bereits als unentscheidbar bekanntes Problem auf sie reduzieren.

$$\mathcal{L}_{010} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathcal{L}(M_w) = \{010\}\}$$

Aufgabe 4.2 (Nicht-Semi-Entscheidbarkeit von Universalität)
Nun wollen wir beweisen, dass das Universalitätsproblem nicht semi-entscheidbar ist.

a) Es sei $M = (Q, \{0,1\}, \{0,1,\text{␣}\}, q_0, \delta, \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\})$ eine DTM.

Eine akzeptierende Berechnung von M lässt sich als Wort kodieren, in dem man die Konfigurationen der Berechnung mit #-Symbolen getrennt hintereinander schreibt, also

$$c_0\#c_1\#c_2\#\ldots\#c_k\ .$$

Geben Sie an, wie man einen Entscheider M'_M konstruiert, welcher die Kodierung einer solchen Berechnung genau dann akzeptiert, wenn es sich nicht um eine akzeptierende Berechnung von M zur Eingabe ε handelt.

Hinweis: Eine Eingabe für M' kann entweder keine valide Kodierung einer Berechnung, oder eine akzeptierende, oder eine nicht-akzeptierende Berechnung sein.

b) Betrachten Sie das folgende Entscheidungsproblem.

<u>Nichtakzeptanz von ε</u> **Gegeben:** Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0,1\}$ **Entscheide:** Akzeptiert M Eingabe ε nicht?

Beweisen Sie, dass dieses Problem nicht semi-entscheidbar ist.

Hinweis: Hierzu müssen Sie keine Reduktion verwenden.

c) Beweisen Sie, dass das Universalitätsproblem aus Aufgabe 1a) nicht semi-entscheidbar ist.

Reduzieren Sie hierzu das Problem aus Aufgabe b).

Beachten Sie: Wenn eine Maschine M Eingabe ε nicht akzeptiert, dann ist die entsprechende Maschine M'_M aus Aufgabenteil a) universell.

Aufgabe 4.3 (PCP)

a) Zeigen Sie, dass das 1-PCP, also das PCP für Instanzen, bei denen die x_i und y_i Wörter über dem unären Alphabet $\{1\}$ sind, entscheidbar ist.

b) Es sei $|\Sigma| \geq 2$. Das k-PCP ist folgendes Entscheidungsproblem.

<u>k-PCP</u> **Gegeben:** Eine endliche Menge von Tupeln aus Wörter $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ über Σ^* **Entscheide:** Gibt es eine endliche, nicht-leere Sequenz von Indizes $i_1, \ldots, i_n$ mit $n \geq k$ und $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} = y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_n}$?

Zeigen Sie, dass das k-PCP unentscheidbar ist.

c) Es sei $|\Sigma| \geq 2$. Das Last-PCP ist folgendes Entscheidungsproblem.

<u>Last-PCP</u>
Gegeben: Eine endliche Menge von Tupeln aus Wörter $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ über Σ^*
Entscheide: Gibt es eine endliche, nicht-leere Sequenz von Indizes $i_1, \ldots, i_n$ mit $i_n = m$ und $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n}$?

Zeigen Sie, dass das Last-PCP unentscheidbar ist.

Aufgabe 4.4 (Satz von Rice)
Geben Sie für folgende Entscheidungsprobleme jeweils an, ob der Satz von Rice anwendbar ist und welche Schlussfolgerungen Sie deswegen ziehen können. Begründen Sie dabei genau warum der Satz anwendbar/nicht anwendbar ist.

a) $\mathcal{L}_{\text{INF}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathcal{L}(M_w) \text{ ist unendlich}\}$.

b) $\mathcal{L}_{\text{TOT}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ ist ein Entscheider}\}$.

c) $\mathcal{L}_{\text{DEC}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathcal{L}(M_w) \text{ ist entscheidbar}\}$.

d) $\mathcal{L}_{\text{UNCOUNTABLE}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathcal{L}(M_w) \text{ ist nicht abzählbar}\}$.

Abgabe bis 30.05.2018 um 12:00 im Kasten neben Raum 343.