Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg
Lydia Kondylidou

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Abgabe bis 14. Juni 2023, 10:00 Uhr

Übung 8 zur Vorlesung

Formale Sprachen und Komplexität

FSK8-1 ***Sprachen einordnen*** (2 Punkte)

Für die i-fache Wiederholung des Worts w schreiben wir $(w)^i$, um Anfang und Ende von w zu markieren. Die Klammern sind daher *nicht* Teil des Alphabets der jeweiligen Sprachen. Die formalen Sprachen L_i, $i = 0, \ldots, 3$, seien definiert als

$$\begin{array}{lcll} L_0 & := & \{(a|a(a|b)^i a) \mid i \in \mathbb{N}\} & \subseteq \{a, b\}^* \\ L_1 & := & \{(a(b)^k a(b)^l)^i \mid i, k, l \in \mathbb{N}\} & \subseteq \{a, b\}^* \\ L_2 & := & \{a^i b^{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\} & \subseteq \{a, b\}^* \\ L_3 & := & \{(ab)^i \$(ab)^i \$(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}\} & \subseteq \{a, b, \$\}^* \end{array}$$

Bearbeiten Sie die folgenden Arbeitsaufträge für jede der Sprachen L_i.

a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass L_i regulär ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass L_i deterministisch kontextfrei ist.

c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass L_i kontextfrei ist.

Hinweis: Nutzen Sie, dass manche Aussagen direkt aus anderen Aussagen folgen. Um zu beweisen, dass L_i regulär/deterministisch kontextfrei/kontextfrei ist, genügt es, ein geeignetes Konstrukt K_i (Grammatik, Automat oder regulärer Ausdruck) anzugeben und kurz zu begründen, warum $L(K_i) = L_i$ gilt.

FSK8-2 ***Kontextsensitive Sprachen*** (0 Punkte)

Geben Sie eine Typ-1-Grammatik an, welche genau die Sprache

$$L = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ist keine Primzahl}\}$$

erzeugt. Erläutern Sie die Funktionsweise Ihrer Grammatik: Wozu dienen die einzelnen Nichtterminale und Produktionen?

Demonstrieren Sie die Funktionsweise Ihrer Grammatik, indem Sie Ableitungen für die Wörter a^0, a^1, a^4 und a^6 angeben.

Hinweis: Wörter $a^n \in L$ mit Mindestlänge 4 können geschrieben werden als $a^{n \cdot m}$ mit $n, m \geq 2$. Eine Herangehensweise, diese Wörter zu erzeugen, ist zunächst a^n zu erzeugen und anschließend dieses Wort $m - 1$-Mal zu kopieren. Diese Idee können Sie in eine Typ-1-Grammatik umsetzen.

FSK8-3 ***LBAs*** (2 Punkte)

Wir betrachten die Sprache $L = \{w \mid \#_a(w) = \#_e(w)\}$ über dem Alphabet $\{a, e\}$.

a) Erstellen Sie auf `https://turingmachinesimulator.com/` einen LBA, der L erkennt. Geben Sie sowohl einen Link zur Maschine an als auch den „Programmtext" der Maschine.

   Hinweis: Die Endzustände Ihrer Maschine dürfen keine ausgehenden Übergänge haben (d.h. $\delta(z, a) = \emptyset$ für alle Endzustände z). Ansonsten verhält sich die Maschine in der Simulation eventuell nicht so, wie wir LBAs definiert haben.

   Wenn Sie Ihren LBA testen, verwenden Sie $\hat{a}$ oder $\hat{e}$, um das Ende eines Wortes zu markieren. Beachten Sie, dass Übergänge für a nicht automatisch auf $\hat{a}$ angewandt werden und dass $\hat{a}$ nicht die gleichen Übergänge wie a haben muss.

b) Geben Sie für Ihren LBA aus Teilaufgabe a) einen Zustandsgraphen an.

c) Geben Sie die Läufe der folgenden Wörter auf Ihrem LBA aus Teilaufgabe a) an: ε, a, $ae\hat{e}$, $eea\hat{a}$.

   Hinweis: Wörter, die nicht in L liegen, erzeugen eventuell unendliche Läufe. Geben Sie in solchen Fällen ein Präfix an, aus dem ersichtlich wird, dass der Lauf unendlich ist.

FSK8-4 ***Deterministisch kontextfrei*** (0 Punkte)

Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass die Sprache $L_{ww} = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ nicht kontextfrei ist.

Betrachten Sie die folgende Grammatik G über $\Sigma = \{a, b\}$.

$$G = (\{S, A, B\}, \Sigma, \left\{\begin{array}{l} S \to A \mid B \mid AB \mid BA, \\ A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid a, \\ B \to aBa \mid aBb \mid bBa \mid bBb \mid b \end{array}\right\}, S)$$

a) Geben Sie 2 Wörter an, die in $L(G)$ liegen, und 2 Wörter, die nicht in $L(G)$ liegen. Jedes Wort soll mindestens 4 Buchstaben lang sein.

b) Zeigen Sie, dass $L(G) = \{w \mid \forall v \in \Sigma^*.\ vv \neq w\}$.

c) Zeigen Sie, dass $L(G)$ nicht deterministisch kontextfrei ist. (Achtung: Nicht verwechseln mit „nichtdeterministisch kontextfrei".)