Fachhochschule
Lippe und Höxter
University of Applied Sciences

Institut für Konstruktiven Ingenieurbau e.V.
an der Fachhochschule Lippe und Höxter

Direkter Nachweis für stabförmige Bauteile und Wände unter Längsdruck

Prof. Dr.-Ing. Erhard Gunkler
Dipl.-Ing. Alice Becke

Nachweisverfahren
Beispiel
Vereinfachung der Verformungsberechnung
Literatur

Juli 2003
(überarbeitet 17.08.2004)

1 Nachweisverfahren

1.1 Allgemeines

- Nicht ein Ersatzstab, sondern das tatsächliche Tragwerk mit seinen Schnittgrößen und Verformungen wird betrachtet
- Nachweis nach Theorie II. Ordnung mit Berechnung der Stabauslenkungen ν folgen aus Integration der Krümmungen κ (oder 1/r) über die Stablänge der Bauteile
- Einflüsse auf die Krümmung bzw. Verformung
  - o Lagerbedingungen
  - o Verlauf der Querschnittsgrößen von Beton und Betonstahl
  - o Verlauf der Normalkraft (Größe und Ausmitte)
- Das direkte Nachweisverfahren hat keine unmittelbare Querschnittsbemessung zum Ziel, da für die Berechnung der Momenten-Krümmungs-Beziehung der Betonstahlquerschnitt im Voraus bekannt sein muss. Es wird daher zwangsläufig eine iterative Berechnung des erforderlichen Betonstahlquerschnitts notwendig.

1.2 Besondere Hinweise für nichtlineare Verfahren nach DIN 1045-1 Abs. 5.2 und 8.5

Bei Anwendung nichtlinearer Verfahren zur Schnittgrößenermittlung (hier: Biegemomente, Verformungen) dürfen die Festigkeitswerte (rechnerische Mittelwert der Festigkeiten des Betons, des Betonstahls bzw. Spannstahls) mit einem einheitlichen Teilsicherheitsbeiwert für den Systemwiderstand γ_R = 1,3 (ständige, vorübergehende Bemessungssituationen; Nachweis gegen Ermüdung) oder γ_R = 1,1 (für außergewöhnliche Bemessungssituationen) berücksichtigt werden (s. a. DIN 1045-1, Abs. 8.6.1 (6)).

Die rechnerischen Mittelwerte der Festigkeiten lauten:

Beton: $f_{cR} = 0{,}85 \cdot \alpha \cdot f_{ck}$ (bis C 50 / 60); α = 0,85 ... 1,0

Betonstahl: $f_{yR} = 1{,}1 \cdot f_{yk}$

Es ist dann: $M_{Rd} = 1 / \gamma_R \cdot M\,(f_{cR}, f_{yR} \ldots)$

1.3 Grundlagen der Schnittgrößen- und Verformungsberechnung nach allgemeingültigen Verfahren

Für den Beton gilt die Spannungs-Dehnungs-Linie nach DIN 1045-1, Bild 22

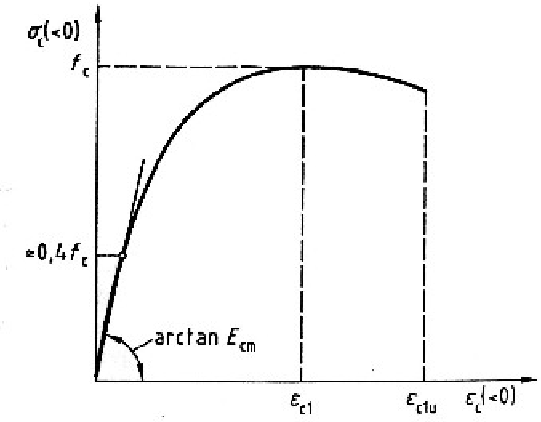


Bild 1: Spannungs-Dehnungs-Linie für die Schnittgrößenermittlung mit nichtlinearen Verfahren und für Verformungsberechnungen (Bild 22, DIN 1045-1)

Die Betonspannung errechnet sich aus:

$$\sigma_C = -f_C \cdot \left(\frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k-2) \cdot \eta} \right)$$

mit $\eta = \frac{\varepsilon_C}{\varepsilon_{C1}}$; $k = -1{,}1 \cdot E_{Cm} \cdot \varepsilon_{C1} / f_C$ $f_c = f_{cR} = 0{,}85 \cdot \alpha \cdot f_{ck}$

Tab.1: Festigkeits- und Verformungswerte für Beton

Für	C 12/15	C 16/20	C 20/25	C 25/30	C 30/37	C 35/45	C 40/50	C 45/55	C 50/60[1)]
f_{Cm}	20	24	28	33	38	43	48	53	58
E_{Cm} [MN/m²]	25.800	27.400	28.800	30.500	31.900	33.300	34.500	35.700	36.800
ε_{c1} [mm/m]	-1,8	-1,9	-2,1	-2,2	-2,3	-2,4	-2,5	-2,55	-2,6

1) für höhere Festigkeitsklasse: Tabelle 9, DIN 1045-1

Die Bemessungswerte der Verformungen ν_d dürfen abweichend von Abs. 1.2 auf der Grundlage von Bemessungswerten bestimmt werden, die auf den Mittelwerten der Baustoffkennwerte (z.B. f_{cm} / γ_c; E_{cm} / γ_c) basieren (DIN 1045-1, Abs. 8.6.1 (7)).

Es ist dann $\nu_d = \nu(f_{cm} / \gamma_c, f_y / \gamma_s ...)$

Für den Betonstahl gilt entweder Bild 26 oder vereinfachend Bild 27 von DIN 1045-1.

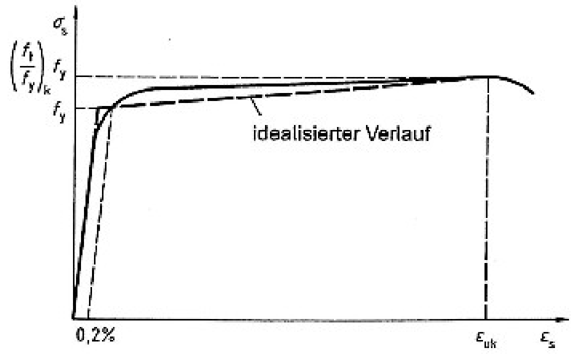


Bild 2:
Spannung-Dehnungs-Linie für die Schnittgrößenermittlung (Bild 26)

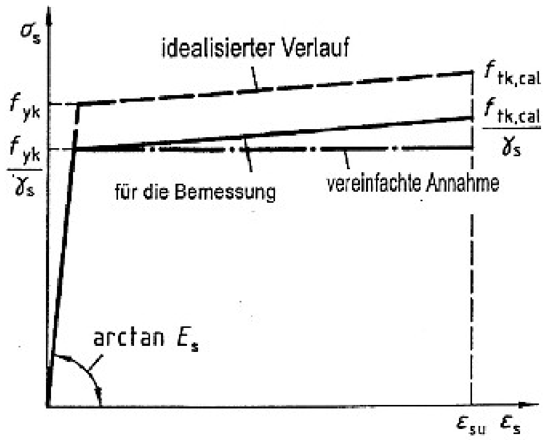


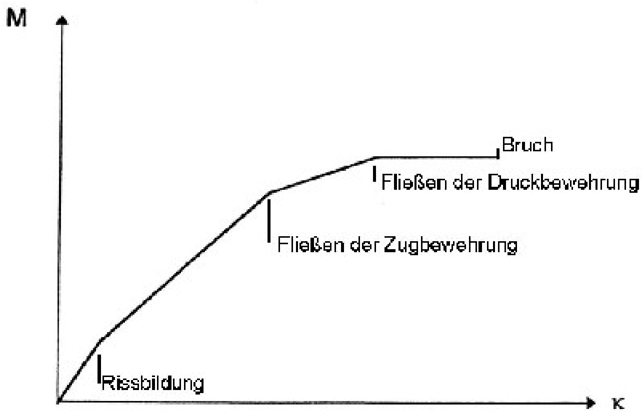
Bild 3:
Spannung-Dehnungs-Linie für die Bemessung (Bild 27)
$f_y = f_{yR}$ rechnerischer Wert der Streckgrenze
$\gamma_S = \gamma_R$

E-Modul: E_S = 200.000 N/mm²

Die Querschnitte bleiben auch nach der Verformung eben.

Mit diesen Grundlagen können für Querschnitte mit vorgegebener Bewehrung (Bewehrungsgehalt und –anordnung) und vorgegebener Normalkraft Momenten – Krümmungsbeziehungen formuliert werden.

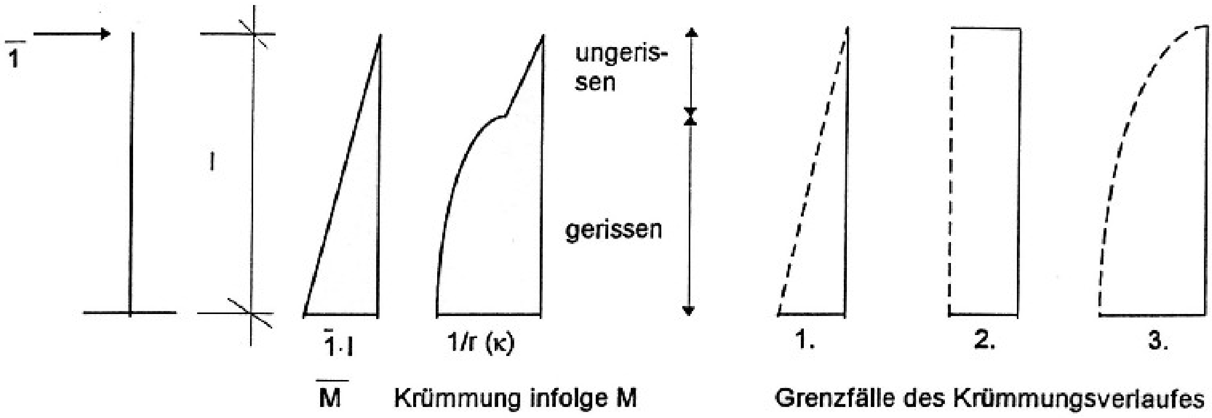
Zusammenhang zwischen Krümmung und den Schnittgrößen wird durch die M - κ - Linie wiedergegeben (Bild 4).



- » Rissbildung: $\varepsilon_{c1} \geq 0$
- » Fließen der Zugbewehrung: $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{yd}$
- » Fließen der Druckbewehrung: $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{yd}$
- » Bruch: ε_{c2} = -3,5 ‰ und / oder $\varepsilon_{s1} \leq \varepsilon_{uk}$
  ε_{uk} = 25 ‰ (BSt 500 A)
  ε_{uk} = 50 ‰ (BSt 500 B)

Bild 4: M - κ - Linie

Aus den Krümmungsverläufen über die Stabhöhe errechnet man mit dem Arbeitssatz die Verformungen υ_d, die zusammen mit der ungewollten Ausmitte e_a und unter Berücksichtigung der Kriechverformung über den Faktor α_c die Berechnung der Zusatzmomente infolge Bauteilverformungen $\Delta M_{Ed} = |N_{Ed}| \cdot (\alpha_c \cdot \upsilon_d + e_a)$ und somit des Gesamtmomentes nach Theorie II. Ordnung erlauben.
Je nach Beanspruchungsart ergeben sich unterschiedliche Grenzfälle der Krümmungsverläufe (Bild 5).



1. Grenzfall: bei großer H-Kraft allein
2. Grenzfall: kleine H-Kraft, kräftige Stütze (kleine Ausmitte)
   sehr fein abgestimmte (abgestufte) Bewehrung
3. Grenzfall: schlanke Stütze (große Ausmitte)

Bild 5: Grenzfälle der Krümmungsverläufe

Ausreichende Tragsicherheit im Grenzzustand der Tragfähigkeit ist nachgewiesen, wenn an jeder Stelle des Tragwerks gilt:
$M_{tot} = M_{Ed} + \Delta M_{Ed} \leq M_{Rd}$ und $|N_{Ed}| \leq |N_{Rd}|$.

Dabei müssen verschiedene Einwirkungen in einem Lastfall betrachtet werden. Das Superpositionsgesetz ist nicht gültig.

1.4 Berechnungsablauf (schematisch)

1.4.1 Vorgaben

i) statisches System

ii) Belastung(en)

iii) Betonquerschnitt

iv) Materialkennwerte

v) Bewehrungsquerschnitt A_s (geschätzt)

1.4.2 M - κ - Linie

Sie ist aufzustellen für einen bestimmten Stützenquerschnitt mit vorgegebenen Baustoffeigenschaften und festgelegter Stabnormalkraft sowie Bewehrungsmenge.

Beim Stabilitätsnachweis von Stützen wird für die M - κ - Linie näherungsweise eine trilinearer Kurvenverlauf angenommen (Bild 6):

- im Übergang von Zustand I nach Zustand II wirkt das Rissmoment $M_{I,II}$ mit der zugehörigen Krümmung $(1/r)_{I,II}$
- der Bereich oberhalb des Fließmomentes M_y bis zum Erreichen des rechnerischen Bruchmomentes M_u wird für den Stabilitätsnachweis nicht ausgenutzt

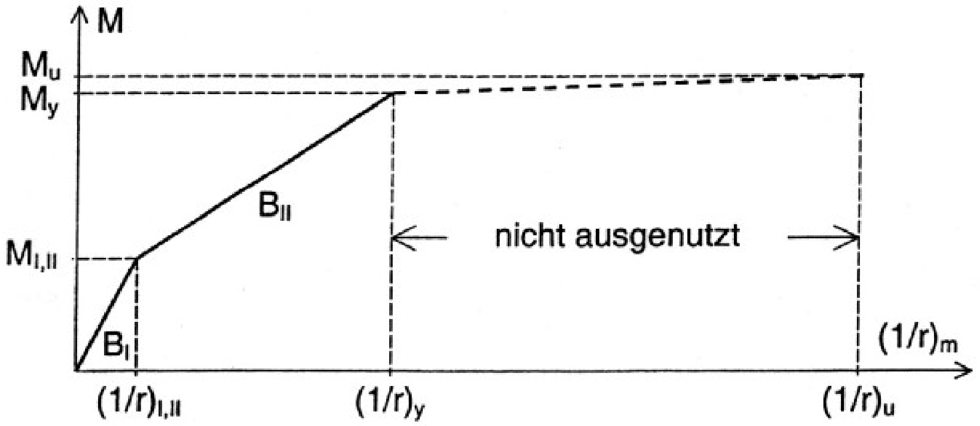


Bild 6: Trilineare M - κ - Linie

Mit den Querschnittswerten des reinen Betonquerschnitts und der Betonzugspannung $\sigma_{ct} = \dfrac{f_{ctm}}{\gamma_c \text{oder } \gamma_R}$ beträgt des Rissmoment

$$M_{I,II} = W_c \cdot \left(\frac{f_{ctm}}{\gamma_c \text{oder } \gamma_R} - \frac{N_{Ed}}{A_c} \right)$$

Die Verwendung ideeller Querschnittswerte ist möglich.

Für einen Punkt der M - κ - Linie wird der Dehnungszustand iterativ so ermittelt, dass zwischen der aufzunehmenden Normalkraft N_{Ed} und den inneren Kräften Gleichgewicht besteht:

(1) Wahl einer Dehnung $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{yd}$ (Stahlspannung erreicht Streckgrenze f_{yd})

(2) Schätzung der zugehörigen Betondehnung ε_{c2}

(3) Berechnung der inneren Bemessungsgrößen F_{s1d}, F_{s2d} und F_{cd} in Abhängigkeit von gewählten Werkstoffgesetzen (s. Abs. 1.3)

Iteration für $N_{Rd} \neq N_{Ed}$

(4) Prüfen, ob Gleichgewicht erfüllt ist

$$\Sigma H = 0:\ N_{Ed} = N_{Rd} = -F_C + F_{S1} - F_{S2}$$

(5) Moment berechnen

Iteration

$$\Sigma M = 0: \quad M_{Rd} = F_C \cdot \left(\frac{h}{2} - a\right) + F_{S1} \cdot \left(\frac{h}{2} - d_1\right) + F_{S2} \cdot \left(\frac{h}{2} - d_2\right)$$

(6) Krümmung berechnen

$$\kappa = \frac{\varepsilon_{S1} - \varepsilon_{c2}}{d}$$

(7) M und κ in Diagramm auftragen

1.4.3 *Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung*

(1) Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung

(2) Verformungen berechnen

Iteration

(3) $M^{II} = M^{I} - N \cdot v$

(4) κ^{II} infolge M^{II} aus M - κ - Linie ablesen

1.4.4 *Nachweis*

Das System ist stabil (im Gleichgewicht), wenn

$$v_{i+1} \leq v_i$$

und

$$M_{Ed} \leq M_y \quad \text{(aus M - }\kappa\text{ - Linie)}$$

und

$$A_{S,erf.} \leq A_{S,vorh.}$$ (mit f_{ck} und γ_c, γ_s; Bemessung im Bruchzustand)

Bei größeren Abweichungen (vor allem bei der Bewehrung) ist ggf. eine weitere Iteration oder sogar die Ermittlung einer neuen M - κ - Linie erforderlich (Wirtschaftlichkeit).

1.5 Berechnung der inneren Schnittgrößen

- Grenzdehnungen ε_s = 25 ‰ bzw. 50 ‰, ε_c = -3,5 ‰
- Spannungs – Dehnungs – Linie des Betons für Schnittgrößenermittlung
- Spannungs – Dehnungs – Linie des Betonstahls: bilinear
- Betonzugspannungen nicht berücksichtigen
- Stahldehnung:

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{s1} - (\varepsilon_{s1} - \varepsilon_{c2}) \cdot \frac{d - d_1}{d}$$

f_c / γ_c

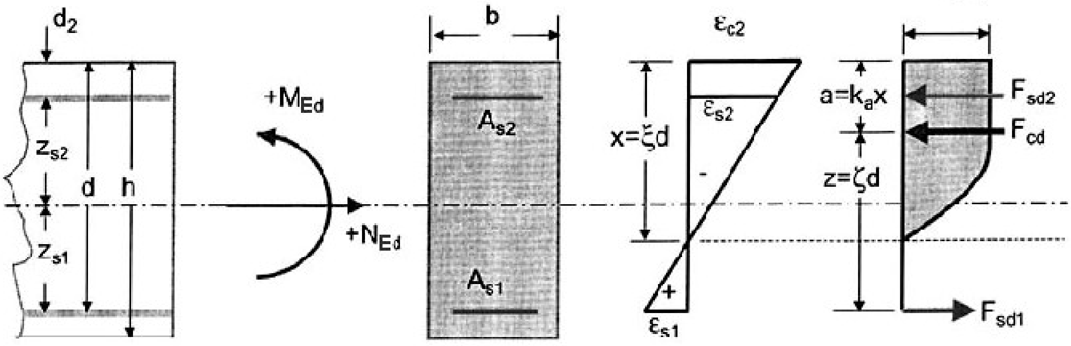
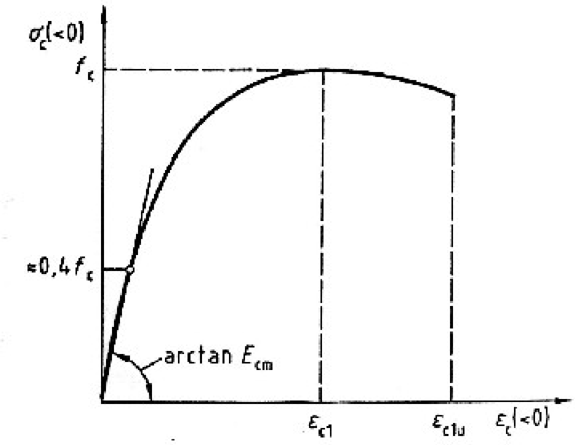


Bild 7: Bezeichnungen



$$f_c = f_{cR} = 0{,}85 \cdot \alpha \cdot f_{ck} \qquad \text{bis C 50/60}$$

$$f_c = f_{cR} = \frac{0{,}85 \cdot \alpha \cdot f_{ck}}{\gamma'_C} \qquad \text{ab C 55/67}$$

$$f_c = f_{cm} = f_{ck} + 8$$

Bild 8: Parabel – Rechteck-Diagramm für Schnittgrößenermittlung mit nichtlinearen Verfahren und für Verformungsberechnungen (DIN 1045-1, Bild 22)

- Stahlzugkraft

$\sigma_{sd} = \varepsilon_s \cdot E_s$ für $\varepsilon_s < 0{,}002115 = \varepsilon_{yd}$; E_s = 200.000 MN/m²

f_{yR} = 550 MN/m² $\varepsilon_s \geq 0{,}002115$ f_{yR} / γ_R = 423 MN/m²

$F_{sdi} = \sigma_{sd} \cdot A_{si}$ bzw. $f_{yRd} \cdot A_{si}$

- Betondruckkraft

$$F_c = b \cdot \int_0^x \sigma_C(y)\,dy \qquad \sigma_C = -f_{cR} \cdot \left(\frac{\frac{k}{\varepsilon_{c1}} \cdot \varepsilon_c - \frac{1}{\varepsilon_{c1}{}^2} \cdot \varepsilon_c{}^2}{1 + \frac{(k-2)}{\varepsilon_{c1}} \cdot \varepsilon_c} \right) \qquad F_{cd} = F_c / \gamma_R$$

- Abstand der Betondruckkraft vom stärker gedrückten Rand

$a = k_a \cdot x$

$$k_a = 1 - \frac{b \cdot \int_0^x \sigma_c(y) \cdot y\,dy}{F_c \cdot x} = 1 - \frac{1}{\alpha_R \cdot \eta^2} \cdot \left(k \cdot Z_1 - \frac{Z_2}{(k-2)^4} \right)$$

- Völligkeitsbeiwert

$$\alpha_R = \frac{\int_0^x \sigma(y) \cdot b \cdot dy}{f_c \cdot b \cdot x} = \frac{k}{k-2} \cdot \left(1 - \frac{\ln(N)}{N-1} \right) - \frac{Z_1}{\eta}$$

In den beiden oberen Gleichungen gilt:

$k = 1{,}1 \cdot E_{cm} \cdot \varepsilon_{c1} / f_c$ (f_c, ε_c negativ einsetzen)

$N = 1 + (k - 2) \cdot \eta$ $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$

$$Z_1 = \frac{1}{(k-2)^3} \cdot \left(\frac{N^2}{2} - 2 \cdot N + \ln(N) + 1{,}5 \right)$$

$$Z_2 = \frac{N^3}{3} - 1{,}5 \cdot N^2 + 3 \cdot N - \ln(N) - \frac{11}{6}$$

In den folgenden Bildern 9 - 14 sind die Gleichungen für α_R und k_a ausgewertet und in Abhängigkeit der Betonstauchung dargestellt:

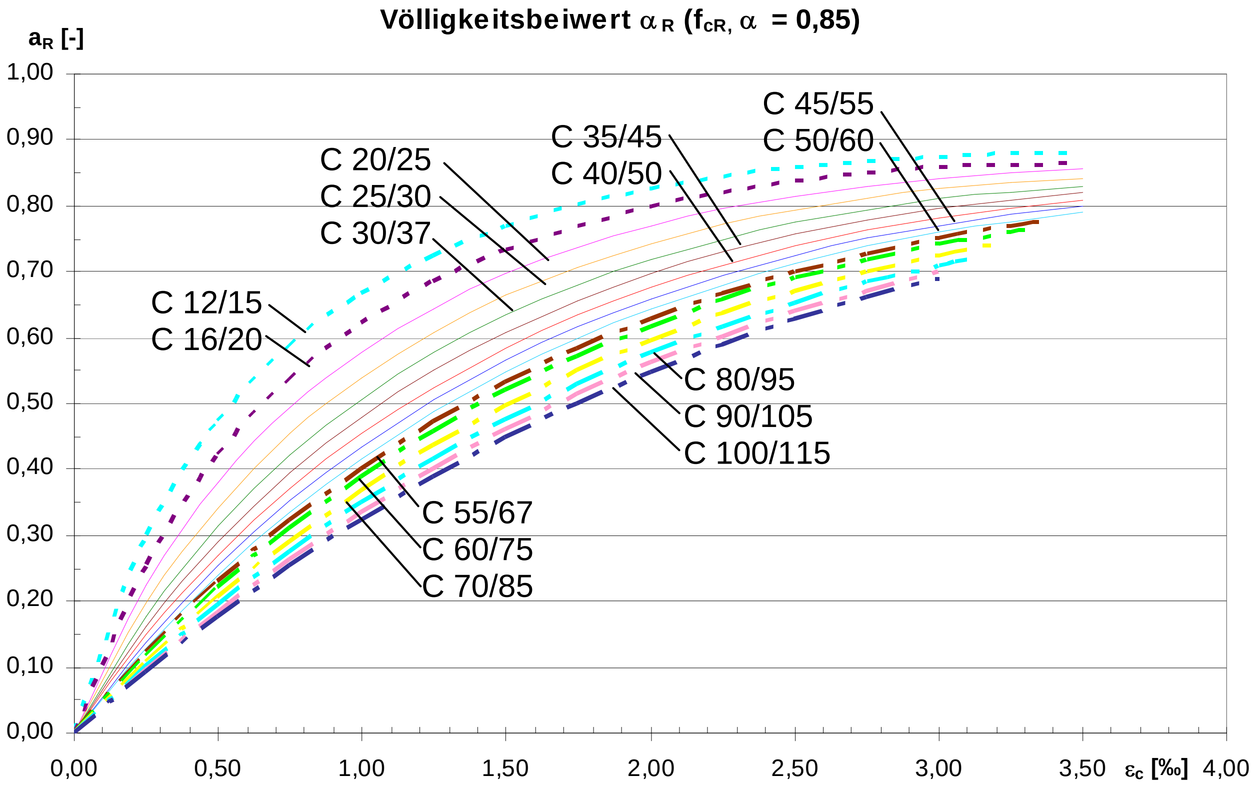


Bild 9: Hilfsdiagramm zur Ermittlung von α_R

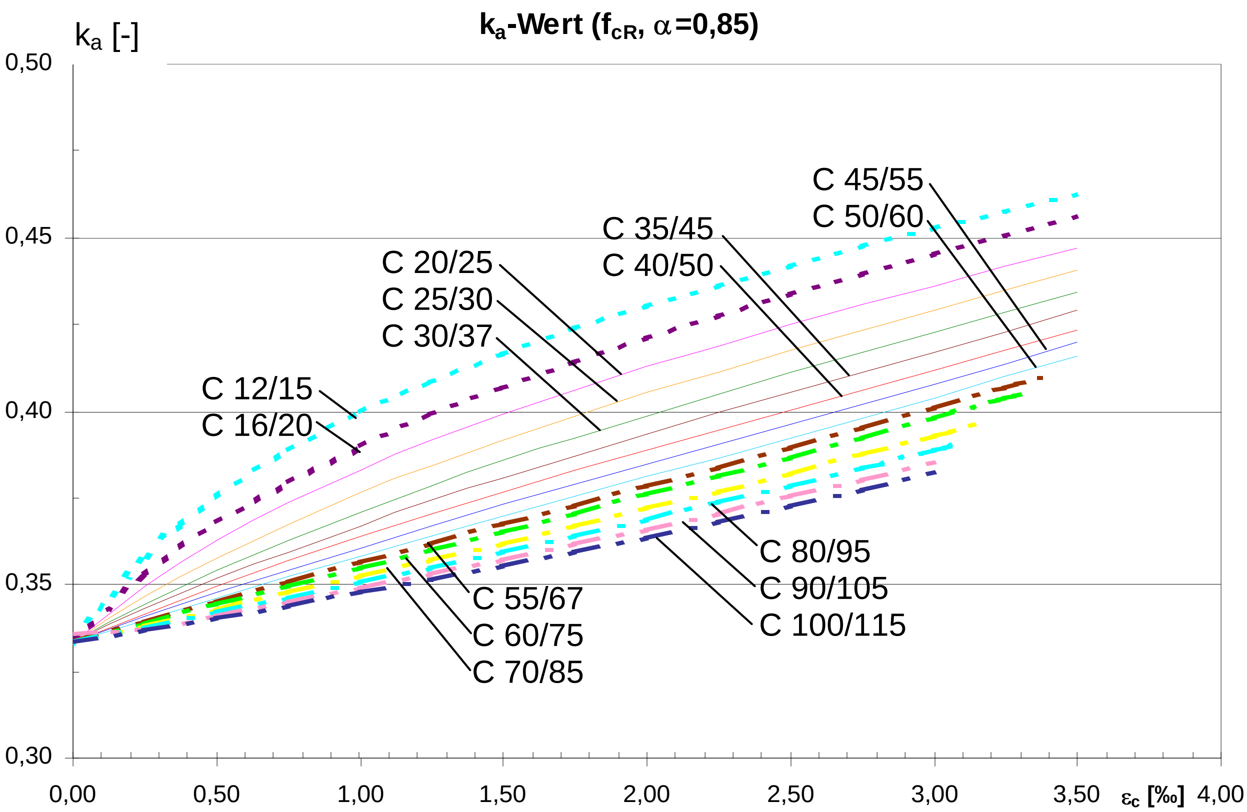


Bild 10: Hilfsdiagramm zur Ermittlung von k_a

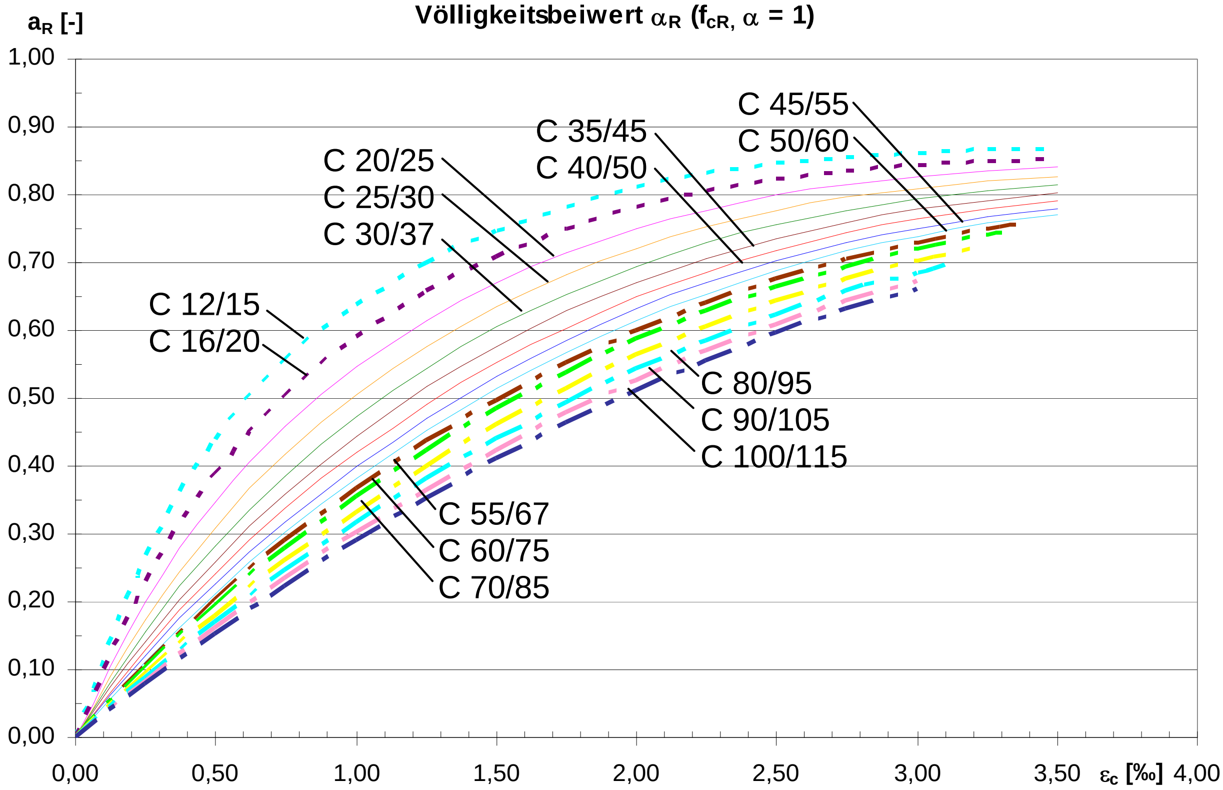


Bild 11: Hilfsdiagramm zur Ermittlung von α_R

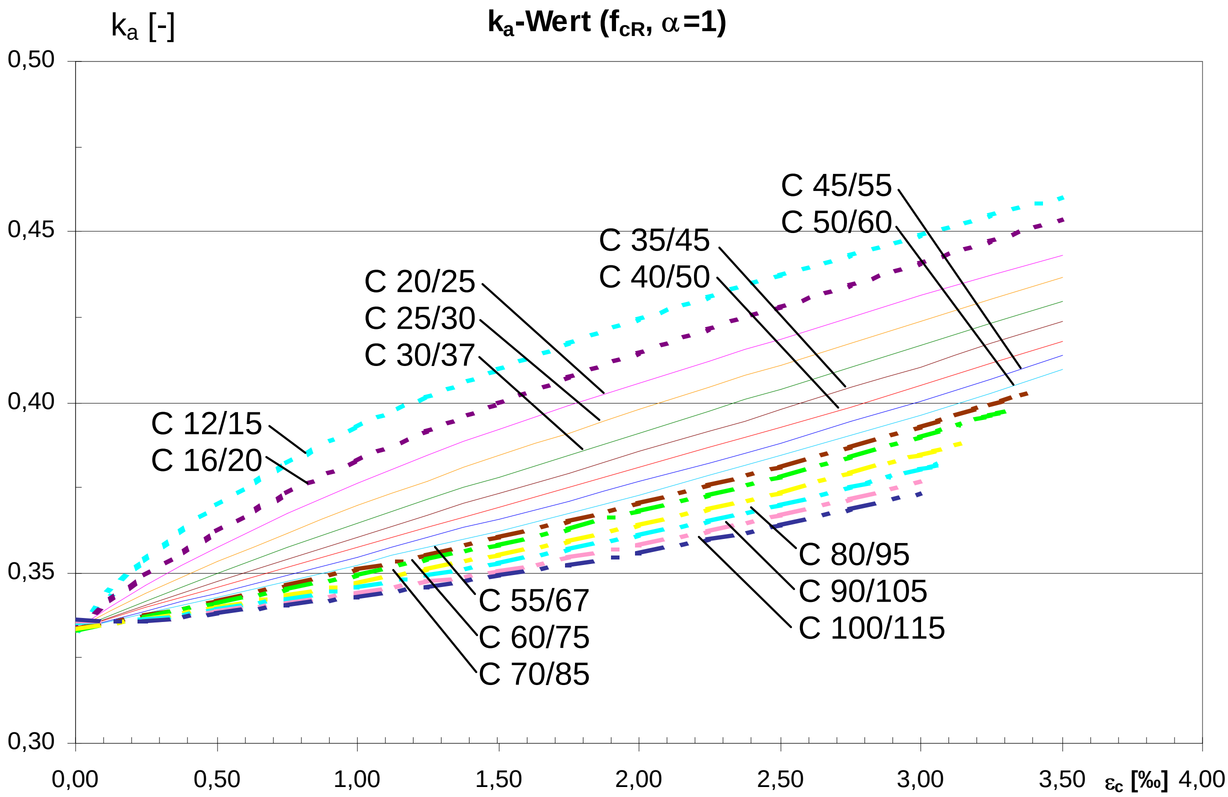


Bild 12: Hilfsdiagramm zur Ermittlung von k_a

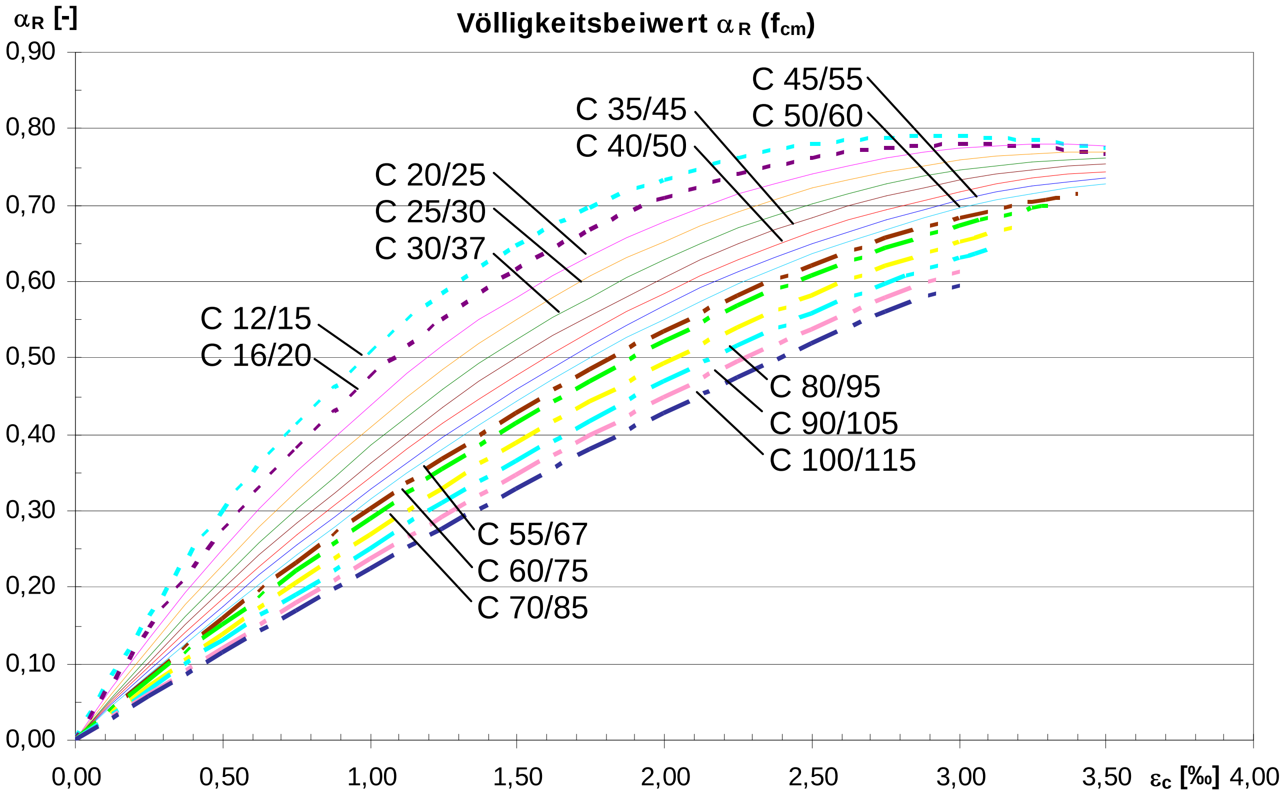


Bild 13: Hilfsdiagramm zur Ermittlung von α_R

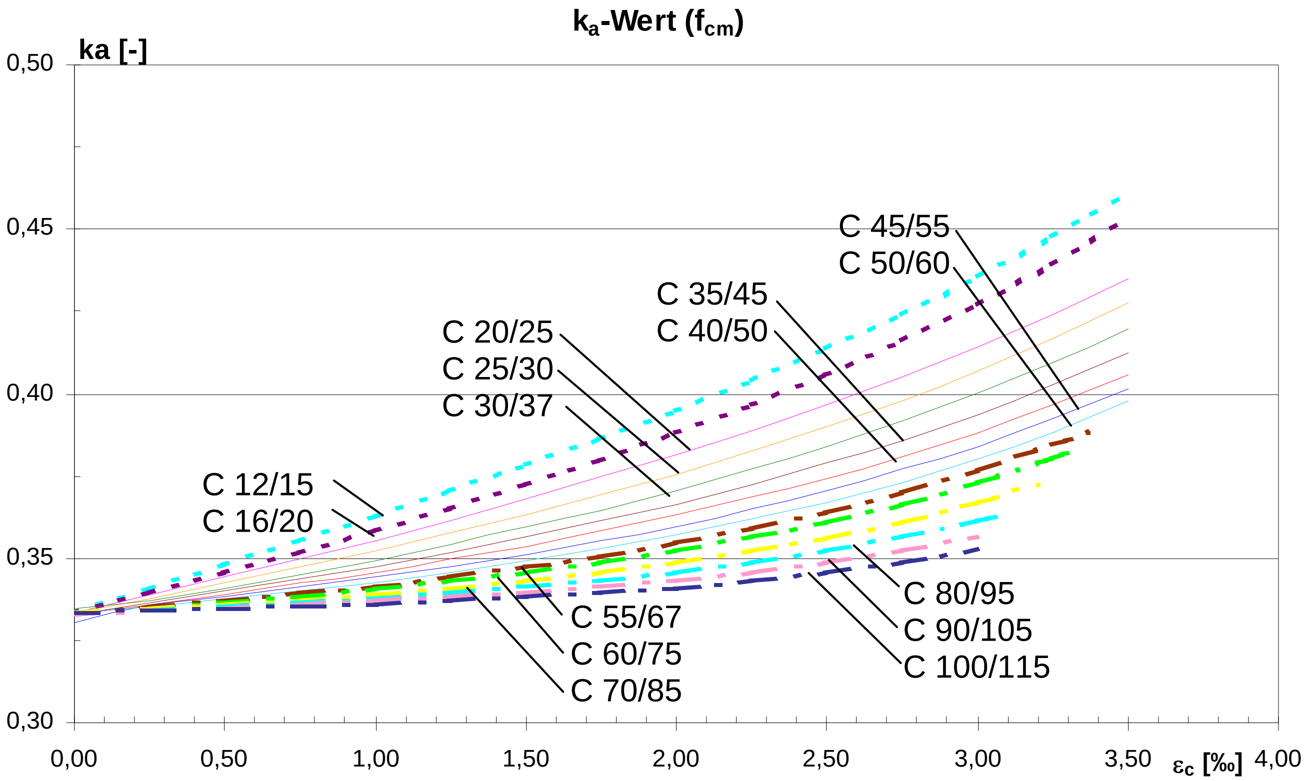
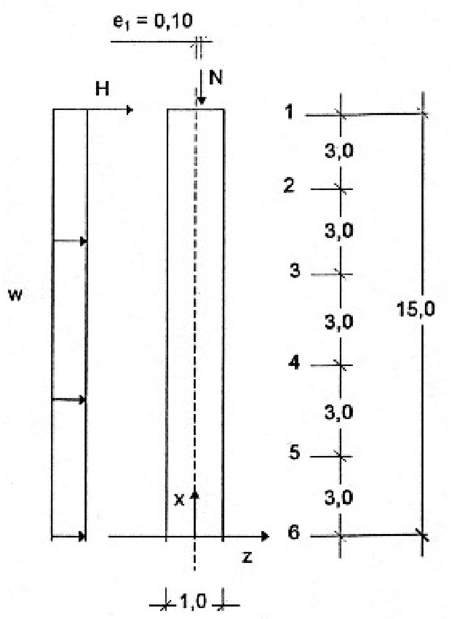


Bild 14: Hilfsdiagramm zur Ermittlung von k_a

2 Beispiel

2.1 Aufgabenstellung

2.1.1 System



Die Bemessung soll mit rechnerischen Baustofffestigkeiten erfolgen!

Bild 15: System und Belastung

2.1.2 Belastung (einschließlich Teilsicherheitsbeiwerte)

N_{Ed} = 7000 kN (mit N_{gk} = 3500 kN) H_{Ed} = 175 kN w_{Ed} = 0,9 kN/m²

2.1.3 Querschnitte

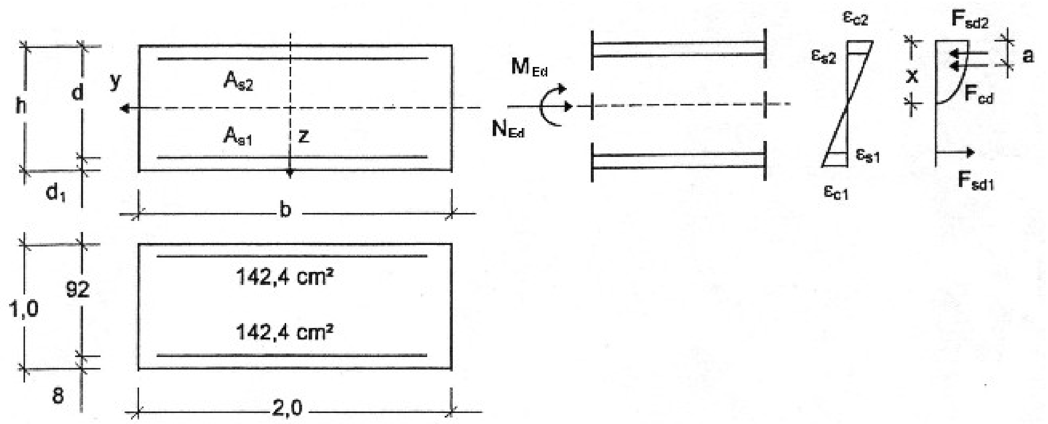


Bild 16: Querschnitt, Bewehrungsquerschnitt und Dehnungen

2.1.4 Materialkennwerte

C 30 / 37

BSt 500 S (A)

2.1.5 Bewehrungsquerschnitt

nach Modellstützenverfahren gewählt: A_s = 142,2 cm²

2.2 M - κ - Linie (mit rechnerischen Mittelwerten: f_{cR} und α = 0,85, γ_R)

2.2.1 Zustand I: Ermittlung des Rissmomentes

ideelle Querschnittswerte

$$\alpha_E = \frac{E_S}{E_{cm}} = \frac{200.000}{31.900} = 6{,}270$$

$$A_i = 1{,}0 \cdot 2{,}0 + (\alpha_E - 1) \cdot (2 \cdot 142{,}2 \cdot 10^{-4}) = 2{,}150 \text{ m}^2$$

$$I_i = \frac{2{,}0 \cdot 1{,}0^3}{12} + (\alpha_E - 1) \cdot (2 \cdot 142{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot \left(\frac{1{,}0}{2} - 0{,}08\right)^2 = 0{,}193 \text{ m}^4$$

Rissmoment:

$$M_{I,II} = \frac{I_i}{h/2} \cdot \left(\frac{f_{ctm}}{\gamma_R} - \frac{N_{Ed}}{A_i}\right) = \frac{0{,}193}{0{,}5} \cdot \left(\frac{2{,}9}{1{,}3} - \frac{-7{,}000}{2{,}150}\right) = \underline{2{,}118 \text{ MNm}}$$

Betondehnung in der Zugzone: $(\varepsilon_{ct})_{I,II} = \frac{f_{ctm}}{E_{cm}} = \frac{2{,}9}{31.900} = 0{,}0909$ ‰

zugehörige Betonspannung in der Druckzone:

$$\sigma_{cc} = \frac{N_{Ed}}{A_i} - \frac{M_{I,II}}{W_c} = \frac{-7{,}000}{2{,}150} - \frac{2{,}118 \cdot 0{,}5}{0{,}193} = -8{,}743 \text{ MN/m}^2$$

Betondehnung in der Druckzone:

$$(\varepsilon_{cc})_{I,II} = \frac{\sigma_{cc}}{E_{cm}/\gamma_R} = \frac{-8{,}743}{31.900/1{,}3} = -0{,}3563 \text{ ‰}$$

Krümmung im Übergang Zustand I und Zustand II

$$\left(1/r\right)_{I,II} = \frac{\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{cc}}{h} = \frac{0{,}0909 - (-0{,}3563)}{1{,}0} = \underline{0{,}4472 \text{ ‰}}$$

2.2.2 Zustand II: Wahl einer Dehnung ε_{s1} = 2,115 ‰

(Streckgrenze gerade erreicht)

2.2.3 Schätzung der zugehörigen Dehnung ε_{c2}

ε_{c2} = -1,800 ‰

Prof. Dr.-Ing. Erhard Gunkler
Dipl.-Ing. Alice Becke
www.iki-detmold.de

Institut für Konstruktiven Ingenieurbau e.V.
an der Fachhochschule Lippe und Höxter

2.2.4 Berechnung der inneren Größen

$$\varepsilon_{S2} = 2{,}115 - (2{,}115 + 1{,}800) \cdot \frac{0{,}92 - 0{,}08}{0{,}92} = -1{,}460\ ‰$$

$F_{s1} = 550 / 1{,}3 \cdot 10^{-1} \cdot 142{,}4 = 6025$ kN

$F_{s2} = -0{,}001460 \cdot 20.000 \cdot 142{,}4 = -4158$ kN

$$x = \frac{1{,}800}{2{,}115 + 1{,}800} \cdot 0{,}92 = 0{,}423\ \text{m}$$

Ablesung aus Diagramm (f_{cR} und $\alpha_R = 0{,}85$):

$\alpha_R = 0{,}69$

$F_{cd} = \alpha_R \cdot b \cdot x \cdot 0{,}85 \cdot \alpha \cdot f_{ck} / \gamma_R$

$$= 0{,}69 \cdot 2{,}0 \cdot 0{,}423 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}85 \cdot \frac{30}{1{,}3} = 9{,}733\ \text{MN}$$

2.2.5 Prüfen des Gleichgewichtes

$N_{Rd} = 6025 - 4218 - 9733 = -7926\ \text{kN} \neq -7000\ \text{kN} = N_{Ed}$

Die Verbesserung des Schätzwertes ergibt $\varepsilon_{c2} = -1{,}694$ ‰

und damit

$N_{Rd} = 6025 - 3882 - 9142 = -7000\ \text{kN} = N_{Ed}$

($x = 0{,}409$ m)

2.2.6 Berechnung des Momentes

Ablesung aus Diagramm:

$k_a \approx 0{,}39$ und damit $a = 0{,}39 \cdot 0{,}41 = 0{,}160$ m

$$M_{Rd} = 9142 \cdot \left(\frac{1{,}0}{2} - 0{,}160\right) + (6025 + 3882) \cdot \left(\frac{1{,}0}{2} - 0{,}08\right) \underline{= 7269{,}2\ \text{kNm}}$$

2.2.7 Berechnung der Krümmungen

$$\kappa = \frac{0{,}002115 - (-0{,}001694)}{0{,}92} \underline{= 0{,}004140\ \text{m}^{-1}}$$

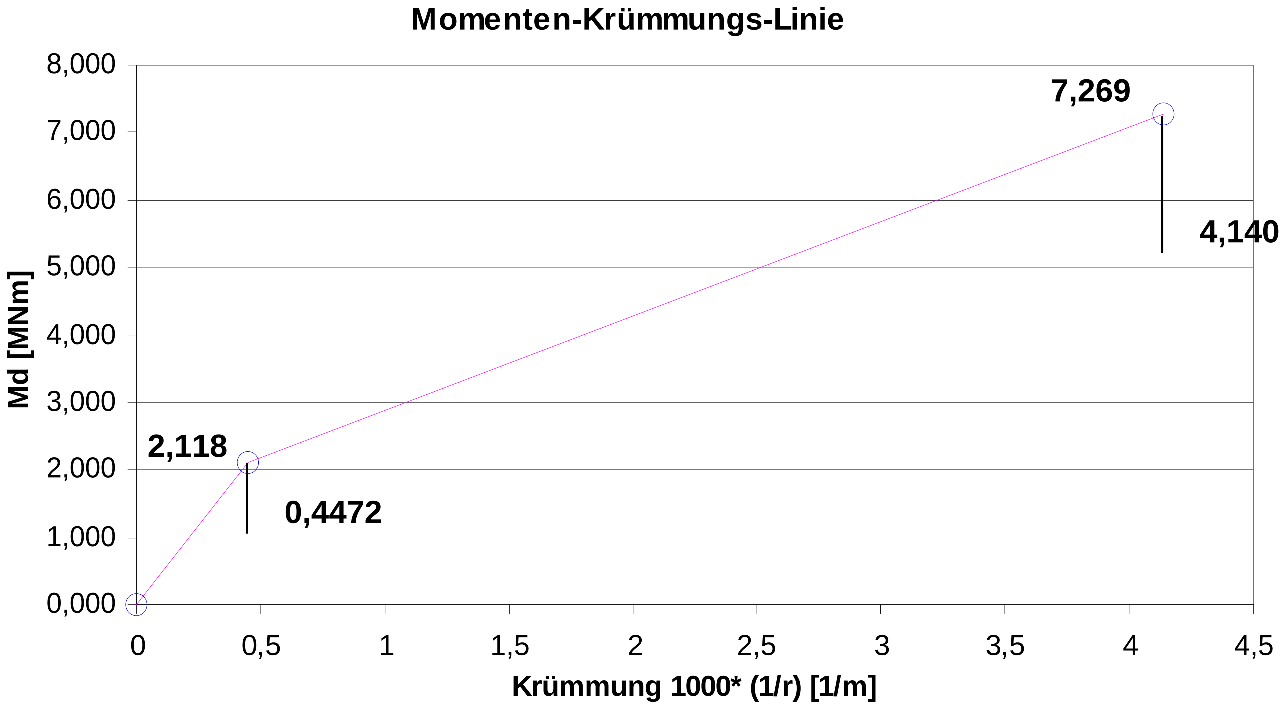


Bild 17: M - κ - Linie

<u>Interpolationformeln:</u>

zwischen 0 und $(1/r)_{I,II}$:

$$\kappa = \left(\frac{1}{r}\right)_{I,II} \cdot \frac{M_d}{M_{I,II}} = M_d \cdot \frac{0{,}4472}{2{,}118} = 0{,}211 \cdot M_d \ [‰]$$

zwischen $(1/r)_{I,II}$ und $(1/r)_y$:

$$\kappa = \left(\frac{1}{r}\right)_{I,II} + \frac{(M_d - M_{I,II}) \cdot \left(\left(\frac{1}{r}\right)_y - \left(\frac{1}{r}\right)_{I,II}\right)}{(M_y - M_{I,II})}$$

$$= 0{,}447 + \frac{(M_d - 2{,}118) \cdot (4{,}140 - 0{,}447)}{(7{,}269 - 2{,}118)}$$

$$= 0{,}447 + 0{,}717 \cdot (M_d - 2{,}118)$$

2.3 Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung

2.3.1 Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung

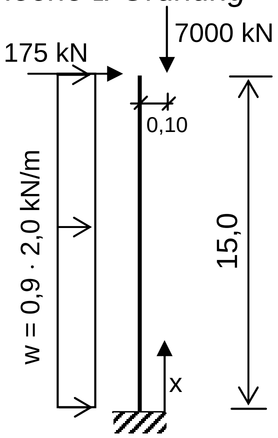


Bild 18: Statisches System und Blastung

$$M^I = 7000 \cdot 0{,}10 + 175 \cdot (l - x) + 0{,}9 \cdot 2{,}0 \cdot 0{,}5 \cdot (l - x)^2$$

2.3.2 Berechnung der Verformungen

i) Verformung nach Theorie I. Ordnung

$\nu_{i+1} = \alpha_c \cdot \nu_i + e_a$; i = 0, 1, ... (i-te Verformungsberechnung)

$\nu_1 = \alpha_c \cdot \nu_0 + e_a$

ii) Verformung infolge Belastung

ν_0: Verformung infolge Belastung (einschließlich e_0, der planmäßigen Ausmitte am Kopf)

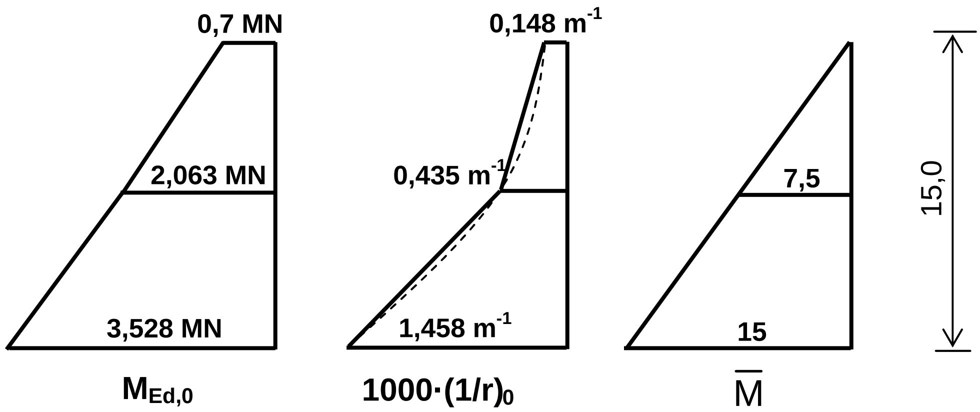


Bild 19: Momente und Krümmung infolge Belastung (Th. I. O.) und infolge Einheitslast

Ermittlung der Krümmungen aus M - κ - Linie interpoliert:

$\kappa_o = 0{,}148 \cdot 10^{-3}\ m^{-1}$
$\kappa_m = 0{,}435 \cdot 10^{-3}\ m^{-1}$
$\kappa_u = 1{,}458 \cdot 10^{-3}\ m^{-1}$

Berechnung von ν_0: $\boxed{\nu_0 = \int \frac{M \cdot \overline{M}}{EI} dx = \int \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \overline{M}\, dx}$

Tab.2: Anwendung der Integraltafeln

Flächen	Abschnittslänge	Randwerte				Auswertung
	[m]	M_i	M_k	$\overline{M}_i$	$\overline{M}_k$	[$\nu_0 \cdot 1000$ m]
Dreieck mit Trapez	7,50	0	7,5	0,148	0,435	9,5438
Dreieck mit Trapez	7,50	0	7,5	0,435	1,458	31,4156
Rechteck mit Trapez	7,50	7,5	7,5	0,435	1,458	53,2406
Summe						**94,2000**

$\nu_0 = 0{,}094$ m

Bei näherungsweiser Integration durch Anwendung der „Simpsonschen Regel“ (Annahme eines parabelförmigen Krümmungsverlaufes über die Stablängsachse) ergibt sich $\nu_0 = 0{,}087$ m. Im Folgenden wird mit dem Ergebnis der Simpsonschen Regel weitergerechnet.

iii) ungewollte Ausmitte

$e_a = \alpha_{a1} \cdot ½ \cdot l_0$

$$\text{mit } \alpha_{a1} = \frac{1}{100\sqrt{l}} \leq \frac{1}{200}$$

$$\alpha_{a1} = \frac{1}{100\sqrt{15}} = \frac{1}{\underline{387}} < \frac{1}{200}$$

$$e_a = \frac{1}{387} \cdot \frac{(2{,}2 \cdot 15)}{2} = 0{,}043 \text{ m}$$

iv) Ausmitte infolge Kriechen

Näherungsweise erfolgt die Berücksichtigung des Kriechens durch Vergrößerung der Verformung ν_i um den Faktor

$$\alpha_c = \left(1 + \frac{M_{Ed,c}}{M_{Ed,1}}\right)$$

$M_{Ed,c}$ kriecherzeugendes Moment infolge quasi-ständiger Einwirkungen (charakteristischer Wert der ständigen Einwirkungen)

$M_{Ed,1}$ Moment infolge äußerer Lasten und ungewollter Schiefstellung

$M_{Ed,1} = N_{Ed} \cdot e_1$

$$e_1 = \frac{M_{Ed,0}}{N_{Ed}} + e_a = \frac{3{,}528 \text{ MNm}}{7{,}0 \text{ MN}} + 0{,}043 \text{ m} = 0{,}547 \text{ m}$$

$$M_{Ed,1} = 7000\text{ kN} \cdot 0{,}547\text{ m} = 3829\text{ kNm}$$

$$M_{Ed,c} = N_{gk} \cdot e_0 = 3500\text{ kN} \cdot 0{,}10\text{ m} = 350\text{ kNm}$$

Faktor zur Berücksichtigung des Kriechens:

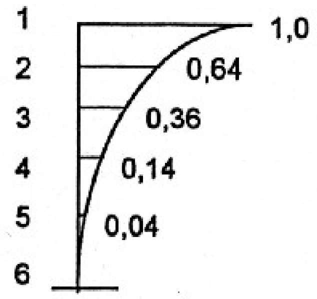
$$\alpha_c = \left(1 + \frac{350}{3829}\right) = \underline{\underline{1{,}09}}$$

Gesamtausmitte:

$$\nu_1 = \alpha_c \cdot \nu_0 + e_a = 1{,}09 \cdot 0{,}087\text{ m} + 0{,}043\text{ m} = 0{,}138\text{ m}$$

2.3.3 Momente nach Theorie II. Ordnung

$$M^{II} = M_0 + \Delta M = M_0 + N_{Ed} \cdot (\alpha_c \cdot \nu_0 + e_a)$$



Annahme: parabelförmiger Verlauf der Verformung

$\nu_1' = 1{,}0$ (Stützenkopf)

$\nu_2' = 0{,}5^2 = 0{,}25$ (Stützenmitte)

$\nu_3' = 0$ (Stützenfuß)

Bild 20: Annahme für Verformung

Zusatzmomente: $\boxed{\Delta M_{i,j} = N_{Ed} \cdot (\nu_1' - \nu_j') \cdot \nu_1}$

$$M^{II}_{d,oben,1} = 0{,}700 + 7{,}000 \cdot (1{,}0 - 1{,}0) = 0{,}700\text{ MNm}$$

$$M^{II}_{d,mitte,1} = 2{,}063 + 7{,}000 \cdot (1{,}0 - 0{,}25) \cdot 0{,}138 = 2{,}788\text{ MNm}$$

$$M^{II}_{d,unten,1} = 3{,}528 + 7{,}000 \cdot (1{,}0 - 0) \cdot 0{,}138 = 4{,}494\text{ MNm}$$

Verformungen:

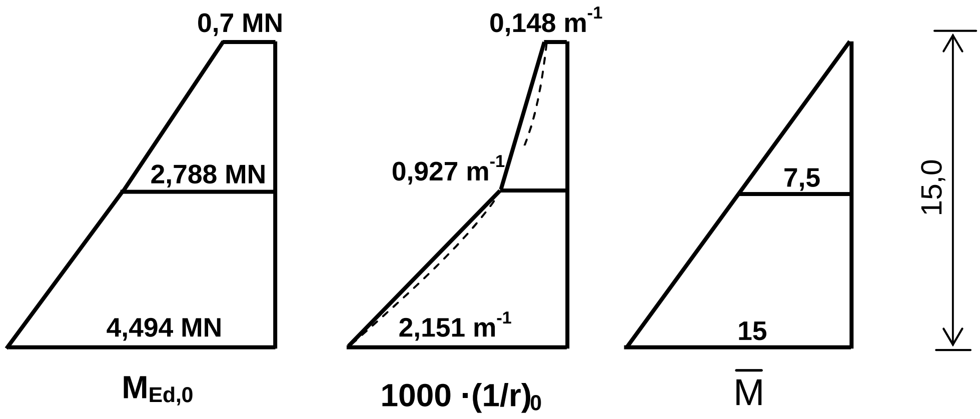
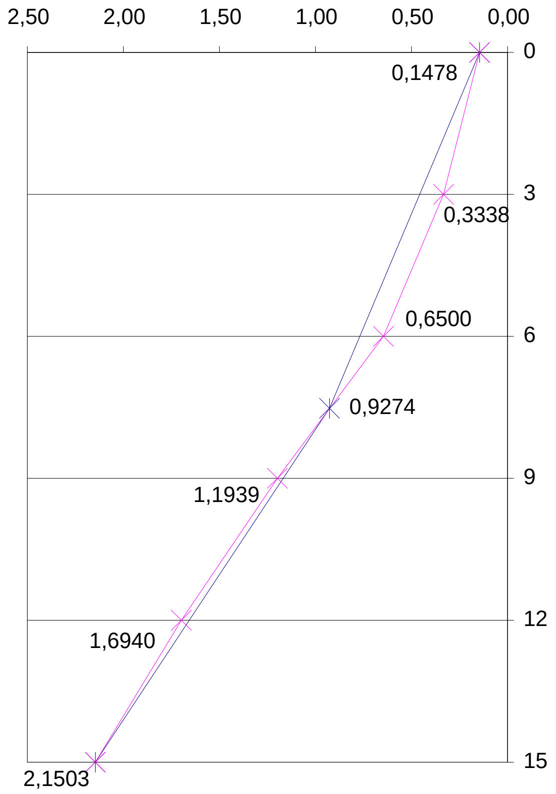


Bild 21: Momente und Krümmung infolge Belastung (Th. II. O.) und infolge Einheitslast

Näherungsweise Integration mit Simpsonscher Regel bzw. Fassregel:
h = (b-a) / n = (15-0) / 2 = 7,5

$$\boxed{\nu_2 \approx \frac{h}{3} \cdot \left(\overline{M}_o \cdot \kappa_o + 4\overline{M}_m \cdot \kappa_m + \overline{M}_u \cdot \kappa_u\right) = \frac{l^2}{6} \cdot \left(2 \cdot \kappa_m + \kappa_u\right)}$$

$\nu = 15^2 / 6 \cdot [2 \cdot 0{,}927 + 2{,}151] \cdot 10^{-3} = 150{,}188 \cdot 10^{-3}$
$\nu = 0{,}150$ m > 0,138 m
(nummerische Integration mit mehr Stützstellen: $\underline{\nu_1 = 0{,}153\text{ m}}$)



neue Iteration erforderlich!!

$\nu_2 = 1{,}09 \cdot 0{,}153 + 0{,}043$
$\underline{= 0{,}210\text{ m}}$

Bild 22: Darstellung der Krümmungen
(abweichende Werte wegen Berechnung mit ungerundeten Werten)

$M^{II}_{d,oben,2} = 0{,}700 + 7{,}000 \cdot (1{,}0 - 1{,}0) = 0{,}700$ MNm

$M^{II}_{d,mitte,2} = 2{,}063 + 7{,}000 \cdot (1{,}0 - 0{,}25) \cdot 0{,}210 = 3{,}166$ MNm

$M^{II}_{d,unten,2} = 3{,}528 + 7{,}000 \cdot (1{,}0 - 0) \cdot 0{,}210 = 4{,}998$ MNm

zugehörige Krümmungen aus M - κ - Linie:

$\kappa_{oben,2} = 0{,}148 \cdot 10^{-3}\ m^{-1}$

$\kappa_{mitte,2} = 1{,}198 \cdot 10^{-3}\ m^{-1}$

$\kappa_{unten,2} = 2{,}512 \cdot 10^{-3}\ m^{-1}$

$\nu = 15^2 / 6 \cdot [2 \cdot 1{,}198 + 2{,}512] \cdot 10^{-3} = 184{,}050 \cdot 10^{-3}$
$\underline{\nu = 0{,}184\text{ m}}$
(nummerische Integration mit mehr Stützstellen: $\nu = 0{,}186$ m)

$\nu_3 = 1{,}09 \cdot 0{,}186 + 0{,}043 \underline{= 0{,}246\ \text{m}}$

Momente nach Theorie II. Ordnung für nächsten Iterationsschritt:

$M^{II}_{d,oben,3} = 0{,}700 + 7{,}000 \cdot (1{,}0 - 1{,}0) = 0{,}700\ \text{MNm}$

$M^{II}_{d,mitte,3} = 2{,}063 + 7{,}000 \cdot (1{,}0 - 0{,}25) \cdot 0{,}246 = 3{,}355\ \text{MNm}$

$M^{II}_{d,unten,3} = 3{,}528 + 7{,}000 \cdot (1{,}0 - 0) \cdot 0{,}246 = 5{,}250\ \text{MNm}$

Momentenzuwachs am Stützenfuß gegenüber vorherigem Schritt:

$$\Delta M = \frac{5{,}250 - 4{,}998}{4{,}998} \cdot 100 = 5{,}04\%$$

Nach abgeschlossener Iteration (5 weitere Schritte) ergibt sich:

$\underline{\underline{\nu_6 = e_{tot} = 0{,}281\ \text{m}}}$ (mit $\Delta M = 0{,}1\ \%$)

endgültige Momente Theorie II. Ordnung:

$M^{II}_{d,oben,6} = 0{,}700\ \text{MNm}$

$M^{II}_{d,mitte,6} = 3{,}538\ \text{MNm}$

$\underline{M^{II}_{d,unten,6} = 5{,}495\ \text{MNm}}$

2.4 Nachweis, erforderliche Bewehrung

Vereinfacht wird das Interaktionsdiagramm für einfach symmetrische Bewehrungsanordnung verwendet, unter Berücksichtigung des einheitlichen Teilsicherheitsbeiwertes $\gamma_R = 1{,}3$ zur Berechnung der bezogenen Schnittgrößen μ_{Ed} und ν_{Ed} :

$$\nu_{Ed} = \frac{-7{,}000}{2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot \left(\frac{0{,}85 \cdot 30}{1{,}3}\right)} = -0{,}178$$

$$\mu_{Ed} = \frac{5{,}494}{2{,}0 \cdot 1{,}0^2 \cdot \left(\frac{0{,}85 \cdot 30}{1{,}3}\right)} = 0{,}140$$

$\Rightarrow \omega_{tot} = 0{,}18$
(Interaktionsdiagramm, d1 / h = 0,1)

$$\text{erf. } A_{s,tot} = 0{,}18 \cdot 100\ \text{cm} \cdot 200\ \text{cm} \cdot \frac{0{,}85 \cdot 30}{550} = \underline{\underline{167{,}0\ \text{cm}^2 < 2 \cdot 142{,}4\ \text{cm}^2}}$$

Nachweis erfüllt!!

2.5 Aufnehmbares Moment (M_y aus M - κ - Linie)

$\underline{M_{Rd} = M_y = 7{,}269\ \text{MNm} > 5{,}494\ \text{MNM}}$

Nachweis erfüllt!!

Prof. Dr.-Ing. Erhard Gunkler
Dipl.-Ing. Alice Becke
www.iki-detmold.de

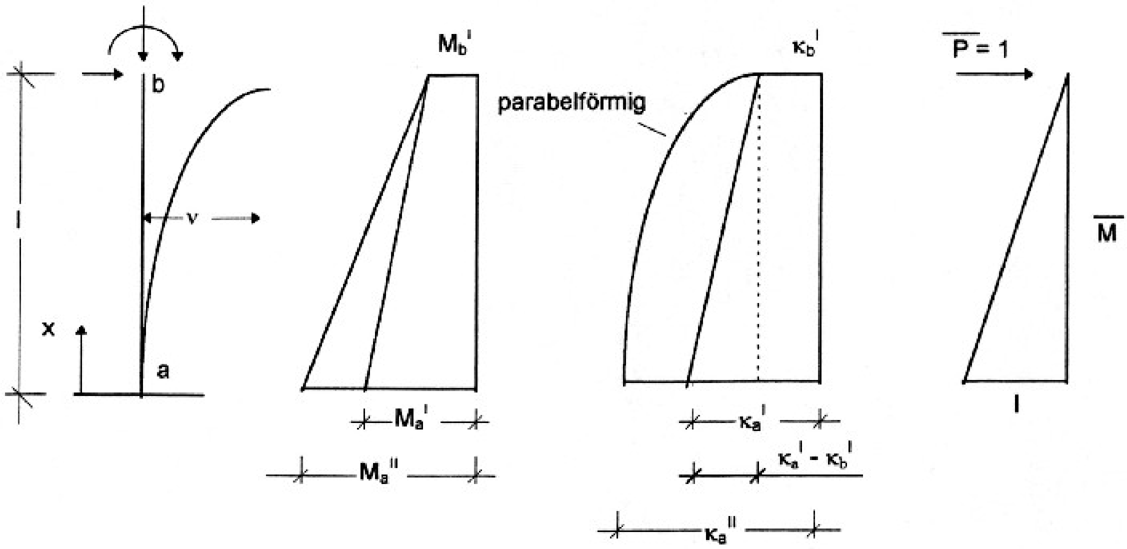
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau e.V.
an der Fachhochschule Lippe und Höxter

3 Vereinfachung der Verformungsberechnung

3.1 Vorgaben und Berechnungsalgorithmen

Die Momenten - Krümmungsbeziehung muß vorhanden sein.

Annahme: parabelförmiger Krümmungsverlauf



$M_a^{II} = M_a^I - N \cdot v$ (N als Druckkraft negativ)

$v = \int \kappa \cdot \overline{M}\, dx$

$$v = \frac{l^2}{12} \cdot \left[5 \cdot \kappa_a^{II} - \kappa_a^{I} + 2 \cdot \kappa_b^{I}\right]$$

κ_a^{II} aus M_a^I, κ_b^I aus M_b^I

$\kappa_a^{II} = \kappa_a^I$ (1. Schritt)

$v_1^{II}, \Delta M_a = N \cdot v^{II}, M_{a,1}^{II} = M_a^I + \Delta M_a$ berechnen

$\Rightarrow \kappa_a^{II}$

$$v_2^{II}, \Delta M_a, M_{a,2}^{II}, \Delta_{1,2} = \frac{M_{a,2}^{II} - M_{a,1}^{II}}{M_{a,1}^{II}} \cdot 100\ [\%]$$

Iteration beendet, wenn „Schranke“ einen Grenzwert unterschreitet, z.B. $\Delta_{i,i+1} < 0{,}1$ [%].

3.2 Anwendung für das Beispiel

1. Schritt:

Krümmungen und Momente infolge äußerer Lasten (S. 18):

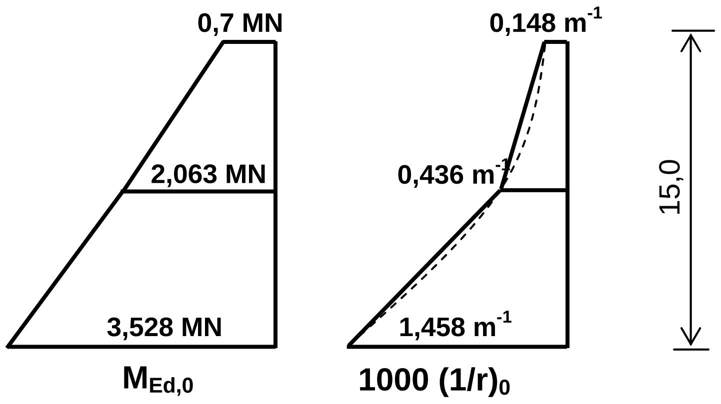


Bild 23: Momente und Krümmung infolge Belastung

Berechnung von ν_0 nach obiger Formel:

$$\nu = \frac{l^2}{12} \cdot \left(5\kappa_a^{II} - \kappa_a^{I} + 2\kappa_b^{I}\right) \text{ mit } \kappa_a^{I} = \kappa_a^{II} = 1{,}458\ ‰$$

$$\nu_0 = \frac{l^2}{12} \cdot \left(4 \cdot 1{,}458 + 2 \cdot 0{,}148\right) \cdot 10^{-3} = 0{,}1149\ \text{m}$$

$e_a = 0{,}043$ m

2. Schritt:

$M_a^{II} = M_a^{I} - N_{Ed}\ (\alpha_c \cdot \nu_0 + e_a)$

$= 3{,}528$ MNm $+ 7{,}0$ MN $\cdot (1{,}09 \cdot 0{,}115 + 0{,}043)$ m

$M_a^{II} = 3{,}528 + 1{,}176 = 4{,}704$ MNm

zugehörig $\kappa_a^{II} = 2{,}331 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^{-1}$ (aus M - κ - Linie)

$$\nu_1 = \frac{l^2}{12} \cdot \left(5 \cdot 2{,}331 - 1{,}458 + 2 \cdot 0{,}148\right) \cdot 10^{-3} = 0{,}1967\ \text{m}$$

3. Schritt:

$M_a^{II} = 3{,}528 + 7 \cdot (1{,}09 \cdot 0{,}197 + 0{,}043)$

$M_a^{II} = 3{,}528 + 1{,}804 = 5{,}332$ MNm

zugehörig $\kappa_a^{II} = 2{,}751 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^{-1}$

$$\nu_2 = \frac{l^2}{12} \cdot \left(5 \cdot 2{,}751 - 1{,}458 + 2 \cdot 0{,}148\right) \cdot 10^{-3} = 0{,}2361\ \text{m}$$

weitere Schritte in Tabellenform:

Schritt	$\kappa_a^{II} \cdot 10^3$	ν_i	ΔM_a	M_a^{II}	Zuwachs
1		0,1149	1,176	4,704	
2	2,331	0,1967	1,804	5,332	13,35
3	2,751	0,2361	2,102	5,630	5,59
4	2,965	0,2562	2,255	5,783	2,72
5	3,075	0,2665	2,334	5,862	1,37
…					
9	3,183	0,2766	2,411	**5,939**	0,08

Nachweis:

$$\nu_{Ed} = \frac{-7{,}000}{2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot \left(\frac{0{,}85 \cdot 30}{1{,}3}\right)} = -0{,}178$$

$$\mu_{Ed} = \frac{5{,}939}{2{,}0 \cdot 1{,}0^2 \cdot \left(\frac{0{,}85 \cdot 30}{1{,}3}\right)} = 0{,}151$$

$\Rightarrow \omega_{tot} = 0{,}20$ (Interaktionsdiagramm)

erf. $A_{s,tot} = 0{,}20 \cdot 100 \cdot 200 / 21{,}56 = \underline{\underline{185{,}52\ cm^2 < 2 \cdot 142{,}4\ cm^2}}$

Nachweis erfüllt!!

$M_{Ed,tot} \leq M_{Rd}$

5,939 MNm $\leq$ 7,269 MNm

Nachweis erfüllt, System stabil!

4 Literatur

- „Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit infolge Tragwerksverformung – Direkter Nachweis“,
  (Falkner, H.; Niemann, P.; Hartmann, A.; iBMB der TU Braunschweig)
- „Materialkennwerte und Schnittgrößenermittlung“
  (Kosmahl, M.; Fachaufsatz in „Stahlbeton- und Spannbetontragwerke nach DIN 1045 Teile 1 bis 3 (Juli 2001) – Erläuterungen und Anwendungen“, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2002)
- „Stabförmige Bauteile mit Längsdruck“
  (Roth, J.; Fachaufsatz in „Stahlbeton- und Spannbetontragwerke nach DIN 1045 Teile 1 bis 3 (Juli 2001) – Erläuterungen und Anwendungen“, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2002)