Aufgaben 18 Reelle Zahlenfolgen
Arithmetische Folge, Geometrische Folge

Lernziele

- verstehen, was eine arithmetische Folge ist.
- das Bildungsgesetz einer arithmetischen Folge bestimmen können.
- verstehen, was eine geometrische Folge ist.
- das Bildungsgesetz einer geometrischen Folge bestimmen können.
- das Bildungsgesetz der arithmetischen/geometrischen Folge in einer konkreten Problemstellung anwenden können.

Aufgaben

18.1 Eine sogenannte **arithmetische** Zahlenfolge $<a_n>$ ist eine Zahlenfolge, bei der die **Differenz** aufeinanderfolgender Folgenglieder immer gleich gross ist:

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = d$, d.h. $a_{n+1} - a_n = d$, d konstant für alle $n \in \mathbb{N}$

Bsp: $<a_n> = 3 , 7 , 11 , 15 , 19 , \ldots$ mit $d = 4$

Eine sogenannte **geometrische** Zahlenfolge $<a_n>$ ist eine Zahlenfolge, bei der der **Quotient** aufeinanderfolgender Folgenglieder immer gleich gross ist:

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = q$, d.h. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, q konstant für alle $n \in \mathbb{N}$

Bsp: $<a_n> = 3 , 6 , 12 , 24 , 48 , \ldots$ mit $q = 2$

Bemerkungen:
- Bei einer **arithmetischen** Folge ist jedes Folgenglied der **arithmetische** Mittelwert der benachbarten Folgenglieder.
- Bei einer **geometrischen** Folge ist jedes Folgenglied der **geometrische** Mittelwert der benachbarten Folgenglieder.

a) Bestimmen Sie das Bildungsgesetz $a_n = ...$

i) … der arithmetischen Zahlenfolge mit $a_1 = 2$ und $d = 3$.

ii) … der geometrischen Zahlenfolge mit $a_1 = 2$ und $q = 3$.

b) Wie lautet das Bildungsgesetz einer …

i) … arithmetischen Zahlenfolge $<a_n>$ allgemein, d.h. ausgedrückt durch a_1, d und n?

ii) … geometrischen Zahlenfolge $<a_n>$ allgemein, d.h. ausgedrückt durch a_1, q und n?

18.2 Bei einer arithmetischen Zahlenfolge ist die Summe aus dem 5. und dem 11. Glied gleich 58, und die Summe aus dem 6. und dem 14. Glied ist gleich 40.

Geben Sie das Bildungsgesetz an, und berechnen Sie das 12. Folgenglied.

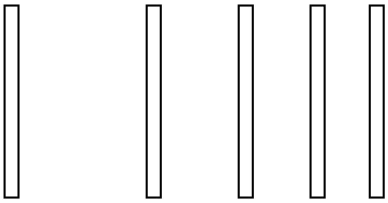
18.3 In einer geometrischen Zahlenfolge ist $a_1 = \frac{2}{3}$ und $a_{10} = 13'122$.

Wie lautet das Bildungsgesetz und wie das 15. Folgeglied?

18.4 Drei Zahlen, deren Summe 39 ist, seien die ersten Glieder a_1, a_2 und a_3 einer geometrischen Zahlenfolge. Vermindert man die dritte Zahl um 12, so entstehen die ersten drei Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge.

Wie lauten die Bildungsgesetze für die arithmetische und die geometrische Zahlenfolge?

18.5 In einer Säulenhalle sind längs einer Geraden kreiszylindrische Säulen des Durchmessers d angeordnet. Die Abstände zwischen den Säulen (von Säulenmitte zu Säulenmitte) nehmen ab und bilden eine geometrische Folge mit dem Faktor q ($0 < q < 1$). Der Abstand zwischen der ersten und der zweiten Säule beträgt a_1.



Bestimmen Sie, aus wievielen Säulen die Säulenhalle höchstens bestehen kann, und zwar …

a) … allgemein algebraisch.

b) … für die Zahlenwerte d = 20 cm, a_1 = 10 m und q = 0.6.

Hinweis:
- Für diese Teilaufgabe b) können Sie einen Taschenrechner verwenden.

Lösungen

18.1 a) i) $a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$

ii) $a_n = 2\cdot 3^{n-1}$

b) i) $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

ii) $a_n = a_1\cdot q^{n-1}$

18.2 $a_n = 65 - \frac{9}{2} n$ $a_{12} = 11$

18.3 $a_n = \frac{2}{3} 3^{n-1}$ $a_{15} = 3'188'646$

18.4 1. Lösung

arithmetische Folge: $a_1 = 3$, $d = 6$, $\langle a_n \rangle = 3, 9, 15, \ldots$
$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 6$

geometrische Folge: $a_1 = 3$, $q = 3$, $\langle a_n \rangle = 3, 9, 27, \ldots$
$a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$

2. Lösung

arithmetische Folge: $a_1 = 27$, $d = -18$, $\langle a_n \rangle = 27, 9, -9, \ldots$
$a_n = 27 + (n - 1) (-18)$

geometrische Folge: $a_1 = 27$, $q = \frac{1}{3}$, $\langle a_n \rangle = 27, 9, 3, \ldots$
$a_n = 27\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

18.5 a) $n < 1 + \frac{\log_a\left(\frac{d}{a_1}\right)}{\log_a(q)}$

b) $n < 8.6 \ldots \rightarrow$ 8 Abstände $\rightarrow$ 9 Säulen