Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 12 **Abgabe: 17. Januar um 12 Uhr**

1 Phasenraumfluss um einen Gleichgewichtspunkt

Die Lösungen der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen stellen Trajektorien, d.h. Kurven, im Phasenraum dar. Für jeden Punkt im Phasenraum gibt es genau eine Kurve durch diesen Punkt (für zeitunabhängige Hamiltonfunktionen). In anderen Worten können sich Trajektoriern im Phasenraum nicht schneiden. In dieser Aufgabe werden wir ein Beispiel dafür untersuchen.

Betrachten wir ein Teilchen der Masse m, das sich entlang einer Geraden in einem Potential $V(x) = -\frac{\alpha}{2}x^2$ bewegen soll, wobei $\alpha > 0$ sei[1]. Die Hamiltonfunktion des Teilchens ist

$$H(x,p) = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{\alpha}{2}x^2. \tag{1}$$

Das System hat nur eine Gleichgewichtslösung, nämlich eine instabile, bei der das Teilchen bei $x = 0$ in Ruhe ist. Im Phasenraum entspricht das der konstanten Trajektorie $\big(x(t), p(t)\big) = (0,0)$. Anders ausgedrückt entspricht die Trajektorie der Gleichgewichtslösung einem einzigen Punkt im Phasenraum.

a) *Skizzieren Sie den Fluss im Phasenraum um den Gleichgewichtspunkt. Bestimmen und zeichnen Sie dafür die Energieniveaumengen (insbesondere für $E = 0$) und zeichen Sie die Richtigung des Flusses ein.* Sie müssen dafür keine besonders genaue Zeichnung machen, eine einfach Skizze genügt (alternativ können Sie auch plotten).

Hinweis: Die Energieniveaumenge zur Energie E ist die Menge aller Punkte (x,p) mit $H(x,p) = E$. Da die Energie erhalten für zeitunabhängige Hamiltonfunktionen erhalten ist, muss der Phasenraumfluss den Mengen konstanter Energie folgen. Hier ist der Phasenraum zweidimensional und die Energieniveaumenge ist daher typischerweise eine Kurve. Da $(\dot{x}, \dot{p})$ die Richtung der Bewegung im Phasenraum angibt, ist die Richtung des Flusses entlang der Energieniveaumengen durch die Hamiltonschen Gleichungen gegeben. [2]. **(2 Punkte)**

b) In Aufgabe a) sollten Sie Kurven gleicher Energie wie die Gleichgewichtslösung gefunden haben, auf denen der Fluss sowohl zu als weg von dem Gleichgewichtspunkt zeigt. Auf den ersten Blick sieht das so aus, als würden sich viele Lösungen im Gleichgewichtspunkt $(0,0)$ schneiden. Das sollte Sie etwas beunruhigen, daher müssen wir hier etwas genauer hinschauen.

Finden Sie eine vollständige Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen bezüglich der Hamiltonfunktion (1). **(2 Punkte)**

c) *Bestimmen Sie alle Lösungen, die die gleiche Energie wie die Gleichgewichtslösung haben.* **(2 Punkte)**

d) *Erreichen die Lösungen aus c), die sich auf den Gleichgewichtspunkt zu bewegen, diesen in endlicher Zeit? Lösen Sie mit dieser Einsicht den scheinbaren Widerspruch zwischen a) und der Aussage, dass sich Trajektorien im Phasenraum nicht schneiden, auf.* **(2 Punkte)**

---

[1] Das wird manchmal der invertiere harmonische Oszillator genannt. Wie beim harmonischen Oszillator ist das Potential quadratisch, aber eben sozusagen auf den Kopf gestellt.

[2] In höheren Dimensionen entsprechenen die Energieniveaumengen typischerweise Flächen und der Fluss würde dann innerhalb dieser bleiben.

Kommentar: Die Analyse des Phasenraumflusses kann nützlich sein um sich ein allgemeines Bild des Verhaltens eines Systems zu machen, auch wenn wir die Bewegungsgleichungen nicht analytisch lösen können. Dies wird sich oft in der Chaostheorie zu Nutze gemacht.

2 Poissonklammern

Die Poissonklammer zwischen zwei Funktionen $f(q_1,\ldots,q_N,p_1,\ldots,p_N,t)$ und $g(q_1,\ldots,q_N,p_1,\ldots,p_N,t)$ ist definiert als[3]

$$\{f,g\} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial q_n} - \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n}\right). \tag{2}$$

Die Poissonklammer erfüllt einige nützliche Rechenregel, wie

$$\{q_k,q_l\} = 0, \quad \{p_k,p_l\} = 0, \quad \{p_k,q_l\} = \delta_{kl},$$
$$\{f,g\} = -\{g,f\}, \quad \{f+g,h\} = \{f,h\} + \{g,h\}, \quad \{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g.$$

Beim Rechnen mit Poissonklammern ist es oft einfacher diese Regeln zu benutzen, als mit der Definition (2) zu arbeiten, wie wir in dieser Aufgabe sehen werden.

a) *Zeigen Sie:*

$$\{q_j,p_k^n\} = -np_k^{n-1}\delta_{jk}, \quad \{p_j,q_k^n\} = nq_k^{n-1}\delta_{jk}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Hinweis: Hier bietet sich ein Induktionsbeweis an. **(2 Punkte)**

b) Der Drehimpuls eines Teilchen mit Ort $\vec{q}$ und Impuls $\vec{p}$ ist $\vec{L} = \vec{q}\times\vec{p}$. Mit $\vec{L} = (L_1,L_2,L_3)$ kann man dies als $L_j = \sum_{kl}\epsilon_{jkl}q_kp_l$ schreiben, wobei ϵ_{jkl} das sogenannte Levi-Civita-Symbol ist[4].

Zeigen Sie:

$$\{q_n,L_j\} = -\sum_k \epsilon_{njk}q_k, \quad \{p_n,L_j\} = -\sum_l \epsilon_{njl}p_l, \quad j,n = 1,2,3, \tag{3}$$

und

$$\{\vec{q}^2,L_j\} = 0, \quad \{\vec{p}^2,L_j\} = 0, \quad j = 1,2,3. \tag{4}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $(\vec{a}\times\vec{b})_j = \sum_{kl}\epsilon_{jkl}a_kb_l$ und $\vec{a}\times\vec{a} = 0$, sowie dass ϵ_{jkl} das Vorzeichen ändert, wenn man zwei Indizes vertauscht, z.B. $\epsilon_{jkl} = -\epsilon_{kjl} = \epsilon_{klj}$.

(4 Punkte)

Kommentar: In dieser Übung machen wir uns mit Poissonklammern und ihrer Algebra vertraut. Rechnungen werden oft einfacher, wenn man weiß wie man diese algebraischen Regeln zu benutzen weiß.

[3] Die Definition der Poissonklammer gibt es in zwei Varianten, die sich aber lediglich in einem globale Vorzeichen unterscheiden. Die Wahl des Vorzeichens bestimmt das der Klammer $\{p_k,q_l\}$.

[4] Das Levi-Civita-Symbol in drei Dimensionen ist $\epsilon_{jkl} = \begin{cases} 1 & (jkl) = (123),(312),(231) \\ -1 & (jkl) = (213),(321),(132) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

3 Erhaltungsgrößen mit Poissonklammern

Nehmen Sie an, dass sich zwei Teilchen gleicher Masse m im dreidimensionalen Raum bewegen können und miteinander durch ein quadratisches Potential wechselwirken. Das kann durch folgende Hamiltonfunktion beschrieben werden:

$$H(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{1}{2m}\vec{p}_1^{\,2} + \frac{1}{2m}\vec{p}_2^{\,2} - \alpha\|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\|^2.$$

Seien $\vec{L}^{(1)} = \vec{q}_1 \times \vec{p}_1$ und $\vec{L}^{(2)} = \vec{q}_2 \times \vec{p}_2$ die Drehimpulse von Teilchen 1 und 2.

a) *Zeigen Sie:*

$$\left\{H, L_j^{(1)} + L_j^{(2)}\right\} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Hinweis: Einige Tricks erleichtern hier die Rechnung, z.B. $\{f(\vec{q}_1, \vec{p}_1) + f(\vec{q}_2, \vec{p}_2), g(\vec{q}_1, \vec{p}_1) + g(\vec{q}_2, \vec{p}_2)\} = \{f(\vec{q}_1, \vec{p}_1), g(\vec{q}_1, \vec{p}_1)\} + \{f(\vec{q}_2, \vec{p}_2), g(\vec{q}_2, \vec{p}_2)\}$. Weiterhin könnten die Gleichungen (3) und (4) hilfreich sein.

(4 Punkte)

b) *Was ist die physikalische Bedeutung von Gl. (5)?* **(2 Punkte)**

Kommentar: Diese Aufgabe zeigt beispielhaft wie Poissonklammern benutzt werden können um Erhaltungsgrößen zu identifizieren. Es stellt sich heraus, dass diese Anwendung der Poissonklammern auch den Startpunkt für eine allgemeine Analyse von Erhaltungsgrößen darstellt.