Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik in zwei Semestern II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla,

WS 2014/15

Blatt 4: Abgabetermin: Dienstag, der 04.11.2014, 10:00

Aufgabe 1: Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator

Die Schrödinger-Gleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator lautet

$$H\psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der folgenden Anleitung die quantisierten Eigenenergien.

a) Führen Sie die dimensionslose Größe $y = \frac{x}{x_0}$ mit der charakteristischen Länge $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ ein und zeigen Sie, dass sich die Schrödinger-Gleichung zu

$$\psi''(y) - y^2\psi(y) = -2\epsilon\psi(y); \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$$

vereinfacht.

b) Benutzen Sie den Ansatz $\psi(y) = u(y)\exp(-\frac{y^2}{2})$ um die gewöhnliche Dgl. zweiter Ordnung

$$u''(y) - 2yu'(y) + (2\epsilon - 1)u(y) = 0$$

für $u(y)$ zu erhalten.

c) Zeigen Sie, dass die Frobenius-Methode mit dem Ansatz $u(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ auf die Rekursionsrelation

$$b_{n+2} = \frac{1 + 2n - 2\epsilon}{(n+2)(n+1)} b_n$$

hinausläuft.

Man kann nun zeigen, dass die Lösung $\psi(y) = \exp(-\frac{y^2}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ nicht normierbar ist! Um dies zu umgehen, muss die Potenzreihe nach einer endlichen Zahl von Termen abbrechen.

d) Zeigen Sie deswegen zuerst, dass für ϵ folgt

$$\epsilon = \frac{1}{2} + (m - 2),$$

wenn die Potenzreihe nach dem m-ten Term abbricht ($b_m = 0,\ b_{m-2} \neq 0$).

e) Setzen Sie nun im nächsten Schritt zuerst alle b_n mit geraden n gleich Null, und schreiben Sie die ϵ-Werte auf, falls die Reihe nach $m = 3, 5, 7, ...$ abbricht. Wiederholen Sie dies nun für den Fall, dass alle b_n mit ungeraden n gleich Null gesetzt werden und zeigen Sie, dass dies die Quantisierung der Energie, $\epsilon_n = \frac{1}{2} + n$ liefert.

(7 Punkte)

Aufgabe 2: Skalarprodukt für komplexe Funktionen

Für komplexe Funktionen lässt sich ein Skalarprodukt folgendermaßen definieren:

$$(\varphi(x), \psi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x))^* \psi(x) \, \mathrm{d}x$$

Wobei $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ normierbare Funktionen sind, d.h. $(f(x), f(x)) < \infty$.

Zeigen Sie:

$$\begin{array}{llcl} \text{a)} & (x\varphi(x), \psi(x)) & = & (\varphi(x), x\psi(x)) \\ \text{b)} & (p_x\varphi(x), \psi(x)) & = & (\varphi(x), p_x\psi(x)) \\ \text{c)} & \left(\hat{a}^\dagger\varphi(x), \psi(x)\right) & = & (\varphi(x), \hat{a}\psi(x)) \end{array}$$

Dabei sind die Operatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ die in der Vorlesung definierten Auf- bzw. Absteigeoperatoren (siehe auch Aufgabe 3).
Hinweis: Verwenden Sie bei b) die partielle Integration.

(3 Punkte)

Aufgabe 3: Absteigeoperator $\hat{a}$

In der Vorlesung haben Sie die Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{\mathrm{x}} - i\frac{\hat{\mathrm{p}}_x}{m\omega} \right) \quad ; \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{\mathrm{x}} + i\frac{\hat{\mathrm{p}}_x}{m\omega} \right)$$

kennengelernt. Diese erfüllen die folgenden Kommutatorrelationen

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1; \quad [\hat{a}, \hat{a}] = 0; \quad \left[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\right] = 0$$

Seien ψ_n mit $n \in \mathbb{N}$ die normierten Eigenfunktionen zum Zähloperator $\hat{\mathrm{n}} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ (es gilt: $\hat{\mathrm{n}}\psi_n = n\psi_n$)

a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\varphi = \hat{a}\psi_\nu$ eine Eigenfunktion zum Zähloperator $\hat{\mathrm{n}}$ mit Eigenwert $\nu - 1$ ist.

b) Aus Aufgabenteil a) folgt $\hat{a}\psi_\nu = \lambda\psi_{\nu-1}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie λ.

Hinweis zu b): Betrachten Sie $(\hat{a}\psi_\nu, \hat{a}\psi_\nu)$ und verwenden Sie $(\psi_\nu, \psi_\nu) = (\psi_{\nu-1}, \psi_{\nu-1}) = 1$ sowie $\hat{\mathrm{n}}\psi_n = n\psi_n$.

(4 Punkte)