“Logische Grundlagen der Mathematik”, WS 2014/15

Thomas Timmermann

8. Januar 2015

5 Kardinalzahlen und die Mächtigkeit von Mengen

Gleichmächtigkeit von Menge

Zur Erinnerung: Wir wollen unendlich große Mengen hinsichtlich der Anzahl ihrer Elemente zu vergleichen und hatten dazu definiert:

- Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, geschrieben $|A| = |B|$, falls eine Bijektion von A nach B (oder, äquivalent, von B nach A) existiert.
- Eine Menge A heißt *abzählbar unendlich*, falls sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}_0$ ist, also eine Bijektion $x\colon \mathbb{N}_0 \to A$ existiert oder, äquivalent, falls eine Folge $x_0, x_1, \ldots$ von Elementen $x_i \in A$ existiert, in der jedes Element von A genau einmal auftritt.

Wir definieren weiterhin:

- Eine Menge A heißt *überabzählbar*, wenn sie unendlich und nicht abzählbar unendlich ist.

Zum Beispiel sahen wir $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ und $|\mathcal{P}(A)| \neq |A|$ für jede Menge A.

Satz (Cantor)**.** *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.*

Zum Beweis benutzen wir:

Lemma. *Eine unendliche Menge A ist genau dann abzählbar unendlich, wenn eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}_0$ nach A existiert.*

Beweis. Eine Richtung ist klar. Sei $x\colon \mathbb{N} \to A$ eine surjektive Abbildung. Wir streichen in der Folge

$$x(1),\ x(2), \ldots$$

alle Wiederholungen desselben Elementes und erhalten eine neue Folge

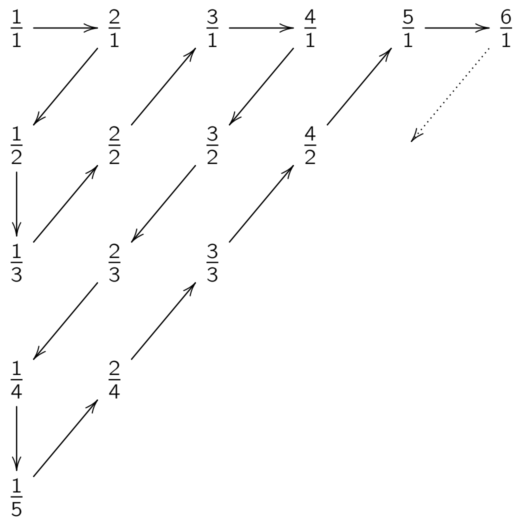
$$y(1),\ y(2), \ldots,$$

in der jedes Element von A genau einmal auftritt. Formal ist

$$y(n) := x(k),\ \text{ falls } |\{x(1), \ldots, x(k-1)\}| = n - 1 \text{ und } |\{x(1), \ldots, x(k)\}| = n.$$

$\square$

Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ (Cantors erstes Diagonalargument). Wir durchlaufen die unendliche Matrix



mit dem Bruch $\frac{i}{j}$ in der i-ten Spalte und j-ten Zeile in der angegebenen Weise und erhalten eine Folge

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \ldots$$

in der jede positive rationale Zahl mindestens einmal auftritt. Nach dem obigen Lemma folgt, dass die positiven rationalen Zahlen abzählbar sind. Die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ folgt ganz leicht. (ÜA) $\square$

Satz (Cantor)**.** $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Beweis (Cantors zweites Diagonalargument). Sei $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Bijektion. Schreibe jedes $x_n := x(n)$ als Dezimalzahl

$$x_n = x_n^{(k_n)} \dots x_n^{(0)}, x_n^{(-1)} x_n^{(-2)} \dots \quad \text{mit } x_n^{(i)} \in \{0, \dots, 9\},$$

also $x_n = \sum_{i=-\infty}^{k_n} x_n^{(i)} 10^i$. Betrachte

$$y := 0, y^{(-1)} y^{(-2)} \dots \quad \text{mit } y^{(-n)} := \begin{cases} 2, & x_n^{(n)} = 1, \\ 1, & x_n^{(n)} \neq 1 \end{cases} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann stimmen die jeweils n-ten Nachkommastellen von y und x_n nicht überein, also $y \neq x_n$ für alle n. Folglich ist die Abbildung $n \mapsto x_n$ nicht surjektiv. $\square$

Der vorige Satz folgt auch aus $|\mathbb{N}_0| \neq |\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)|$ und dem Folgenden:

Satz. $|\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)| = |[0, 1]|$.

Weitere Beispiele:

Lemma (ÜA)**.** *Für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *gilt* $|(a, b)| = |\mathbb{R}| = |[a, b]|$.

Kardinalzahlen

Man kann die Axiome der Mengenlehre von ZFC erweitern, indem man Mengen erster und zweiter Stufe betrachtet, die beide jeweils nur Mengen erster Stufe als Elemente enthalten dürfen (Neumann-Bernays-Gödel). Man nennt dann Mengen erster Stufe einfach "Mengen" und Mengen zweiter Stufe "Klassen". Insbesondere gibt es dann die Klasse aller Mengen (aber weder die Menge aller Mengen noch die Menge oder Klasse aller Klassen). Auf der Klasse aller Mengen ist Gleichmächtigkeit

- reflexiv: für jede Menge A ist die Identität eine Bijektion,
- symmetrisch: ist $f\colon A \to B$ eine Bijektion, so auch $f^{-1}\colon B \to A$,
- transitiv: sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Bijektionen, so auch $g \circ f\colon A \to C$,

also eine Äquivalenzrelation.

Definition. *Die* Mächtigkeit *oder* Kardinalität *einer Menge A ist die zugehörige Äquivalenzklasse*

$$|A| := \text{die Klasse aller Mengen } B\text{, die zu } A \text{ gleichmächtig sind.}$$

Diese Äquivalenzklassen nennt man Kardinalzahlen.

Nach dieser Definition bilden die Kardinalzahlen nicht nur keine Menge, sondern auch keine Klasse. Mit einem Trick von von Neumann, dem Auswahlaxiom und der Hilfe von Ordinalzahlen kann man aber eine Klasse von Repräsentanten wählen und somit so tun, als ob die Kardinalzahlen eine Klasse bilden.

Lemma (ÜA)**.** *Auf den Kardinalzahlen kann man eine Addition und Multiplikation definieren durch*

$$|A| + |B| := |A \cup B|, \text{ falls } A \cap B = \emptyset, \qquad |A| \cdot |B| := |A \times B|,$$

und diese Operationen erfüllen die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze.

Außerdem kann man eine natürliche Ordnung definieren. Dazu betrachten wir auf der Klasse aller Mengen die Relation

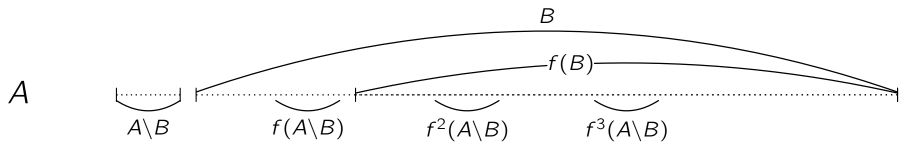
$$A \preceq B \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt eine injektive Abb. } A \to B.$$

Satz (Schröder-Bernstein)**.** *Seien A und B Mengen mit $A \preceq B$ und $B \preceq A$. Dann folgt $|A| = |B|$.*

Beweis. Seien $f: A \to B$ und $g: B \to A$ injektive Abbildungen. Indem wir B durch $g(B)$ ersetzen, können wir $B \subseteq A$ und $g = \mathrm{id}_B$ annehmen.
Betrachte nun

$$A \setminus B, \qquad f(A \setminus B), \qquad f^2(A \setminus B), \qquad \dots, \qquad f^n(A \setminus B), \qquad \dots.$$

Diese Mengen sind paarweise disjunkt (haben keine gemeinsamen Elemente) und f bildet $f^n(A \setminus B)$ bijektiv auf $f^{n+1}(A \setminus B)$ ab.



Somit bildet f die Menge

$$C := \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(A \setminus B)$$

bijektiv auf sich selbst ab. Außerdem ist $A \setminus C \subseteq B$. Die Abbildung

$$h\colon A \to A,\ x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in C, \\ x, & x \notin C \end{cases}$$

ist dann eine Bijektion von A nach B. Somit folgt $|A| = |B|$. □

Der Beweis zeigt sofort:

Folgerung. *Ist A eine Menge und $f : A \to A$ eine injektive Abbildung, so folgt für jede Teilmenge B mit $f(A) \subseteq B \subseteq A$ die Gleichung $|f(A)| = |B| = |A|$.*

Folgerung. *Durch $|A| \preceq |B| :\Leftrightarrow A \preceq B$ wird eine Ordnung auf den Kardinalzahlen definiert.*

Beweis. Wir prüfen

- Wohldefiniertheit: falls $|A| = |B|$ und $|C| = |D|$, so gilt $A \preceq C$ genau dann, wenn $B \preceq D$,
- Reflexivität: klar;
- Transitivität: aus $A \preceq B$ und $B \preceq C$ folgt $A \preceq C$,
- Antisymmetrie: folgt aus dem vorigen Satz. □

Wir werden später sehen, dass unter Annahme des Auswahlaxioms diese Ordnung total ist, also für je zwei Mengen A und B stets $|A| \leq |B|$ oder $|A| \geq |B|$ gilt.