Einführung in die Diskrete Mathematik

Aufgabenblatt 3: Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Aufgabe 1 (Zwei Würfel, 2 Punkte).

Ist es wahrscheinlicher bei vier Würfen eines Würfels mindestens eine 6 oder bei 24 Würfen von zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs $(6, 6)$ zu erhalten?

Aufgabe 2 (Markow- und Tschebyschow-Ungleichung, 5 Punkte).

Gegeben sei eine endliche Menge Ω, eine Abbildung $p\colon \Omega \to [0, 1]$ mit $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$, eine Zufallsgröße $X\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sowie $a > 0$. $[\mathbb{P}(X \geq a) := \sum_{\omega\in\Omega\,:\,X(\omega)\geq a} p(\omega).]$

(a) Beweisen Sie die Markow-Ungleichung

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

(a) Beweisen Sie die Tschebyschow-Ungleichung

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

Aufgabe 3 (Wahrscheinlichkeitstheoretische Existenzbeweise, 5 Punkte).

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) und es gelte $p(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Außerdem sei eine Zufallsgröße $X\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben, die $X(\omega) > 0$ für mindestens ein $\omega \in \Omega$ erfüllt. Viele wahrscheinlichkeitstheoretische Existenzbeweise beruhen auf den folgenden Beobachtungen.

(a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{E}(X) > 0$.

(b) Beweisen Sie, dass $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ existieren, sodass $X(\omega_1) \leq \mathbb{E}(X) \leq X(\omega_2)$.

Abgabetermin ist am 30.10.2018 zu Beginn der Übung.