TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth,
M.Sc. Chris Köcher
WS 2020/21

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Automaten, Sprachen und Komplexität – Übung 9

Abgabe: bis Mittwoch, der 16. Dezember 2020, um 07:00 Uhr via Moodle.

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Klausurpunkte umgerechnet.

Aufgabe 1* — 4 Punkte

Beweisen Sie das *doppelte Pumping-Lemma* für reguläre Sprachen, das wie folgt lautet:
Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann gibt es $n \geq 1$ derart, dass für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gilt:
Es gibt Wörter $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ mit

(i) $z = uvwxy$
(ii) $|uvwx| \leq n$
(iii) $|v|, |x| \geq 1$
(iv) $uv^iwx^jy \in L$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen aus der Vorlesung.

Aufgabe 2* — 2+2 Punkte

Wir betrachten das *vereinfachte doppelte Pumping-Lemma* für kontextfreie Sprachen (welches nicht gilt):
Wenn L eine kontextfreie Sprache ist, dann gibt es $n \geq 1$ derart, dass für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gilt:
Es gibt Wörter $q, r, s, t, u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ mit

(i) $z = qrstuvwxy$
(ii) $|rt|, |vx| \geq 1$
(iii) $qr^ist^iuv^jwx^jy \in L$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Sprache $\{a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Gegenbeispiel für das Lemma ist.

(b) Formulieren Sie ein gültiges doppeltes Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen. Ein Korrektheitsbeweis ist nicht nötig.

Hinweis: Orientieren Sie sich für die Formulierung an Ihrem Beweis aus Aufgabe 1 und an dem Beweis für das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen aus der Vorlesung.

Aufgabe 3* — 2+2 Punkte

Sei Σ ein Alphabet und $K, L \subseteq \Sigma^*$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist K deterministisch kontextfrei und L regulär, so ist $K \cap L$ deterministisch kontextfrei.

(b) Ist L regulär beziehungsweise kontextfrei, so gilt dies auch für den Abschluss von L unter Präfixen, d.h. für die Sprache $\{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : uv \in L\}$.

Aufgabe 4* 3 Punkte

Geben Sie einen Algorithmus an, der bei Eingabe eines PDAs M und eines NFAs N entscheidet, ob $L(M)$ Teilmenge von $L(N)$ ist.

Anmerkung: Später in der Vorlesung werden wir zeigen, dass es keinen Algorithmus geben kann, der die umgekehrte Teilmengenbeziehung entscheidet.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 5

Geben Sie für folgende Funktionen je eine primitiv rekursive Definition und ein LOOP-Programm an.

(a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto n^2$

(b) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto n^n$

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$c\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}\colon (m,n) \mapsto m + \binom{m+n+1}{2}$$

eine Bijektion ist.

Aufgaben zum Selbststudium

Aufgabe 7

Geben Sie ein LOOP-Programm an, das für zwei gegebene Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ den größten gemeinsamen Teiler berechnet.