
„Grundwassersysteme und Numerik“

Veranstaltung im Modul Hydrosystemanalyse

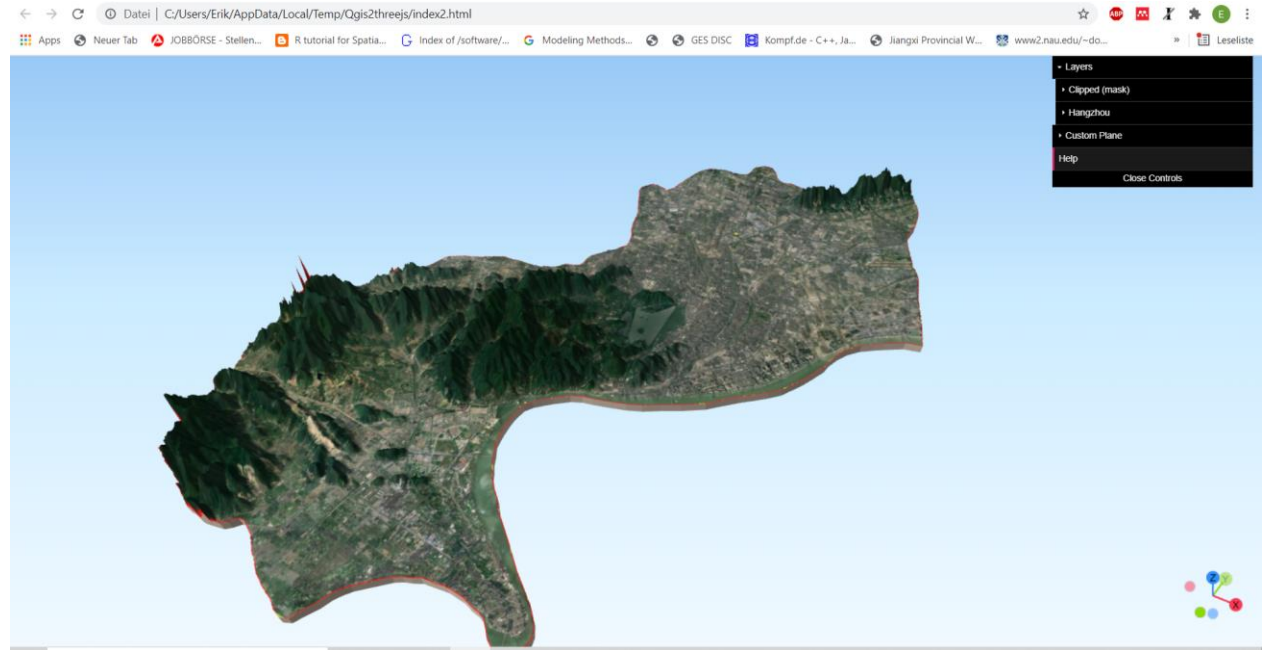
- V6: Randbedingungen und Modellparameter

Prof. Dr. Olaf Kolditz

Dr. Erik Nixdorf
21.05.2021

Wiederholung Übung 5

- GIS Übung: Grundlagen der Vektor und Rasterdatenbearbeitung mit QGIS
- Gibt es Fragen?



Randbedingungen

- Die Numerische Lösung partieller Differentialgleichung über einen Raum Ω benötigt Informationen über die Statusvariablen (abhängigen Variablen) für bestimmte Teilgebiete: **Rand und Initialbedingungen**
- Randbedingung: Geometrie der Randbedingung + Art der Randbedingung + Werte der abhängigen Variable oder ihrer Ableitungen**

Name	Mathematischer Name	Mathematischer Ausdruck
Constant Head	Dirichlet	$h(x) = f(x), x \in \partial\Omega_D$
Specific Flux	Neumann	$\frac{\partial h(x)}{\partial n} = \frac{\partial h(x)}{\partial n} \Big _0 = g(x), x \in \partial\Omega_N$
Head-dependent Flux	Robin/Cauchy	$\alpha h(x) + \beta \frac{\partial h(x)}{\partial n} = C(x), x \in \partial\Omega_R$

Randbedingungen: Geometry

- Für jedes Teilsegment des Randes **muss** eine Randbedingung definiert sein

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D + \partial\Omega_N + \partial\Omega_R$$

- Ränder für die keine Teilrandbedingung explizit definiert wurden ist eine „No-Flow“ Boundary

$$\frac{\partial h(x)}{\partial n} = 0$$

- Mehrere Randbedingungen auf einer Geometrie sind grundsätzlich möglich
- Randgeometrien $\partial\Omega_n$ sind eine Dimension niedriger als das Modellgebiet
- Dirichletrandbedingungen (u.U. auch Neumann/Robin) können zusätzlich auch für „innere Ränder“ definiert werden

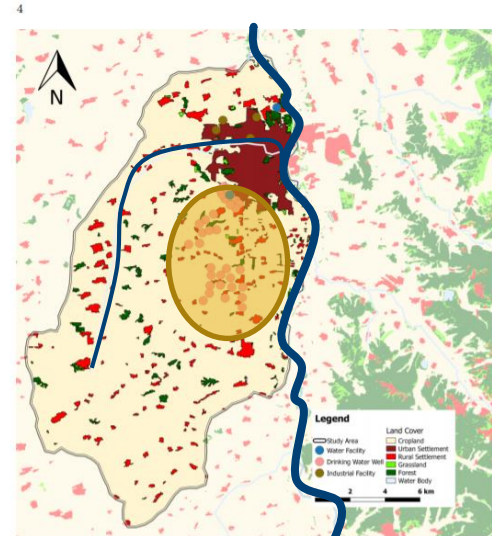
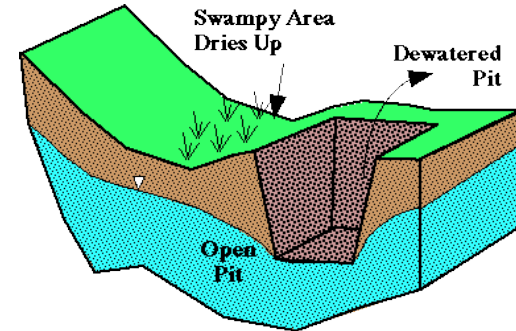
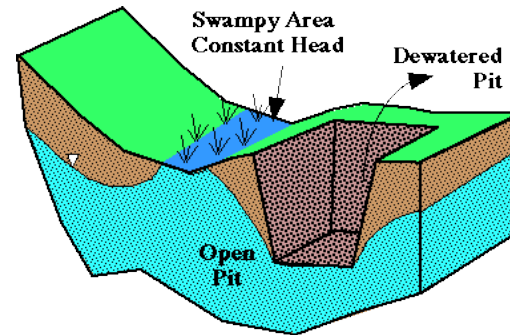
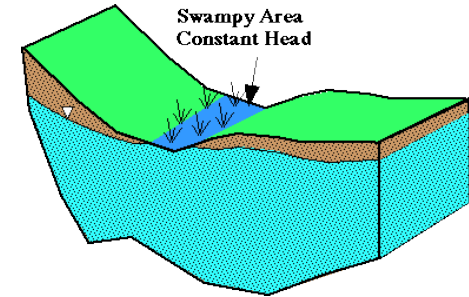


Fig. 1.2: Land use at the study site

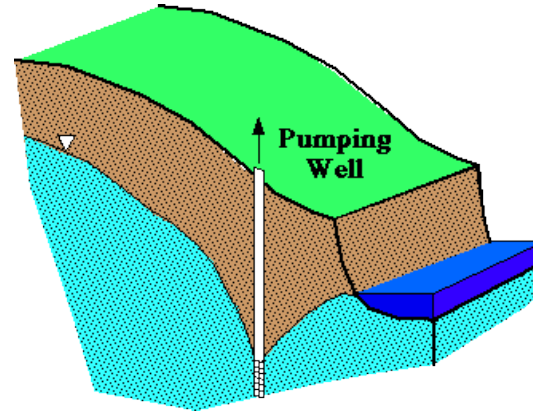
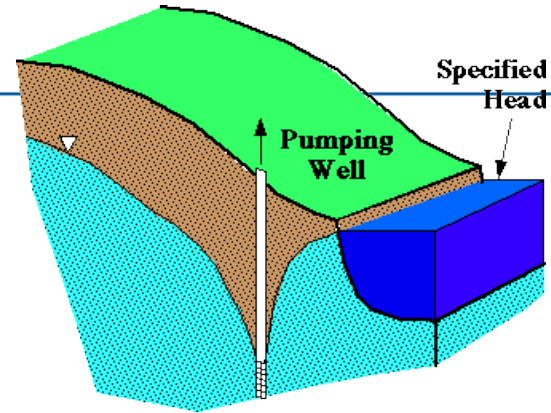
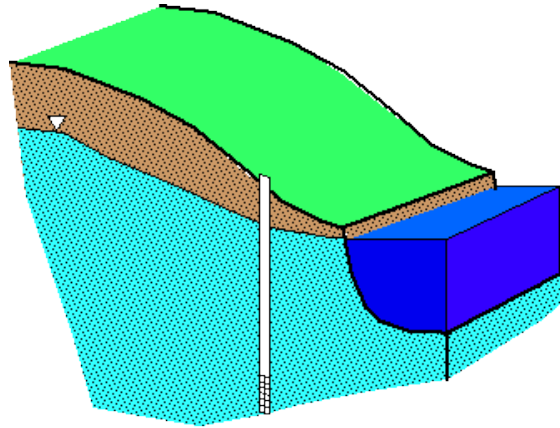
Randbedingungen: Dirichlet

- Dirichlet: $h(x) = f(x), x \in \partial\Omega_D$
- Die Randbedingung kann auch zeitlich dynamisch sein: $h(x, t) = f(x, t), x \in \partial\Omega_D$
- Physische Entitäten die über Dirichlet Randbedingungen beschrieben werden könnten
 1. See (Wasserstandshaltung?)
 2. Meer (Gezeiten?)
 3. Quelle?
 4. Fluss?
 5. ...
- Zeitliche Gültigkeit der Randbedingung?



<https://tinyurl.com/aca263dd>

Randbedingungen Dirichlet



Randbedingung: Neumann

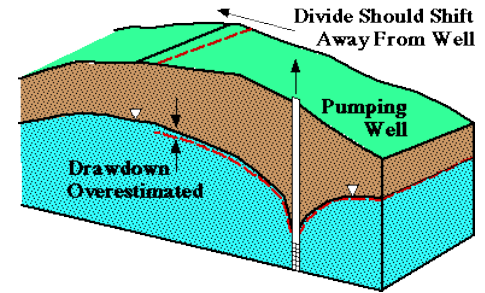
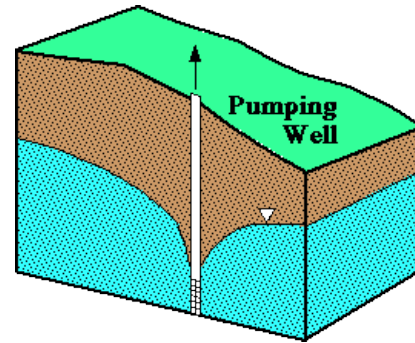
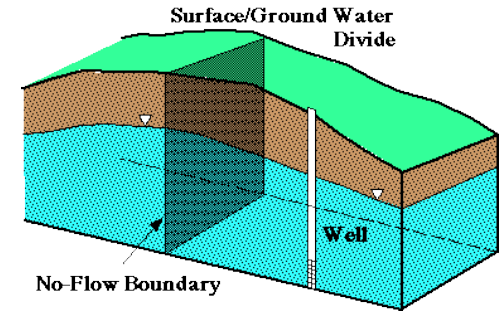
- Neumann: $\frac{\partial h(x)}{\partial n} = \frac{\partial h(x)}{\partial n} \Big|_0 = g(x), x \in \partial\Omega_N$
- Die Randbedingung kann zeitlich dynamisch sein:

- $\frac{\partial h(x,t)}{\partial n} = \frac{\partial h(x,t)}{\partial n} \Big|_0 = g(x,t), x \in \partial\Omega_n$

- Physische Entitäten die über Dirichlet Randbedingungen beschrieben werden könnten:

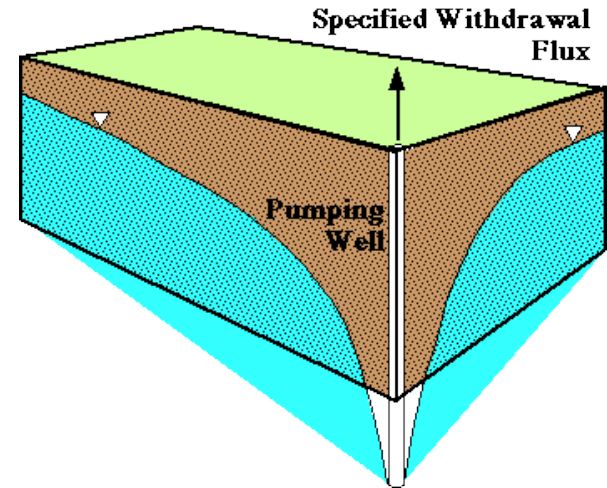
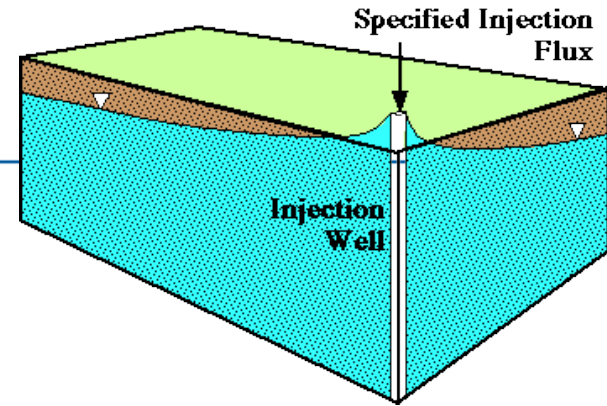
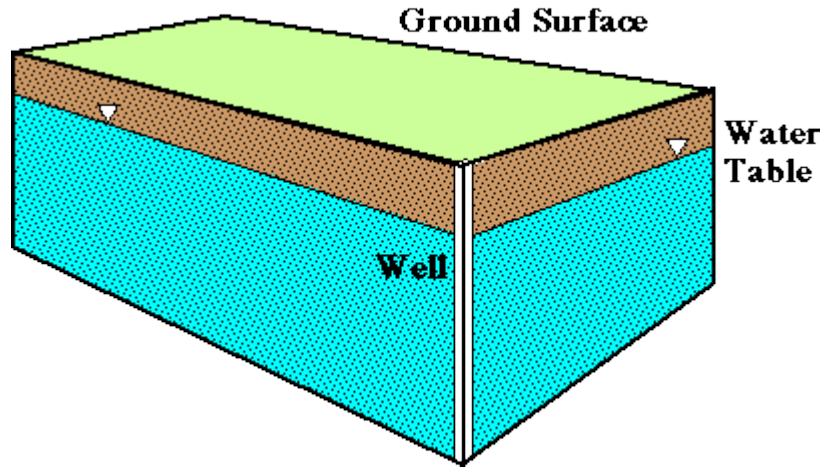
1. Quellen?
2. Salz/Grundwasser Interface
3. Grundwasserscheiden
4. Grundwasserneubildung
5. Geringleiter (Leakage Faktor)
6. Flüsse?

- Zeitliche Gültigkeit?



<https://tinyurl.com/68a5fer4>

Randbedingung Neumann



<https://tinyurl.com/u4mm2dxs>

Randbedingungen: Grund- Flusswasserinteraktion

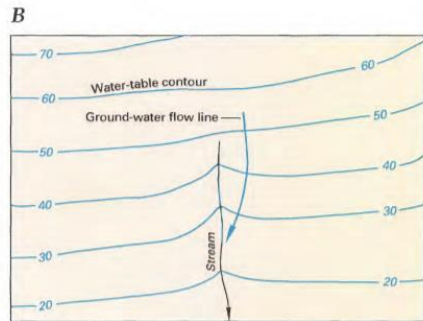
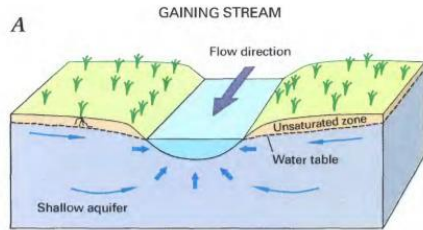


Figure 8. Gaining streams receive water from the ground-water system (A). This can be determined from water-table contour maps because the contour lines point in the upstream direction where they cross the stream (B).

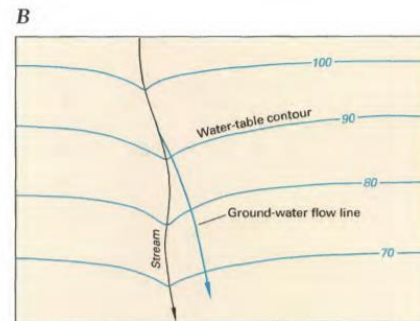


Figure 9. Losing streams lose water to the ground-water system (A). This can be determined from water-table contour maps because the contour lines point in the downstream direction where they cross the stream (B).

<https://tinyurl.com/y25cutv8>

Randbedingungen: Grund- Flusswasserinteraktion

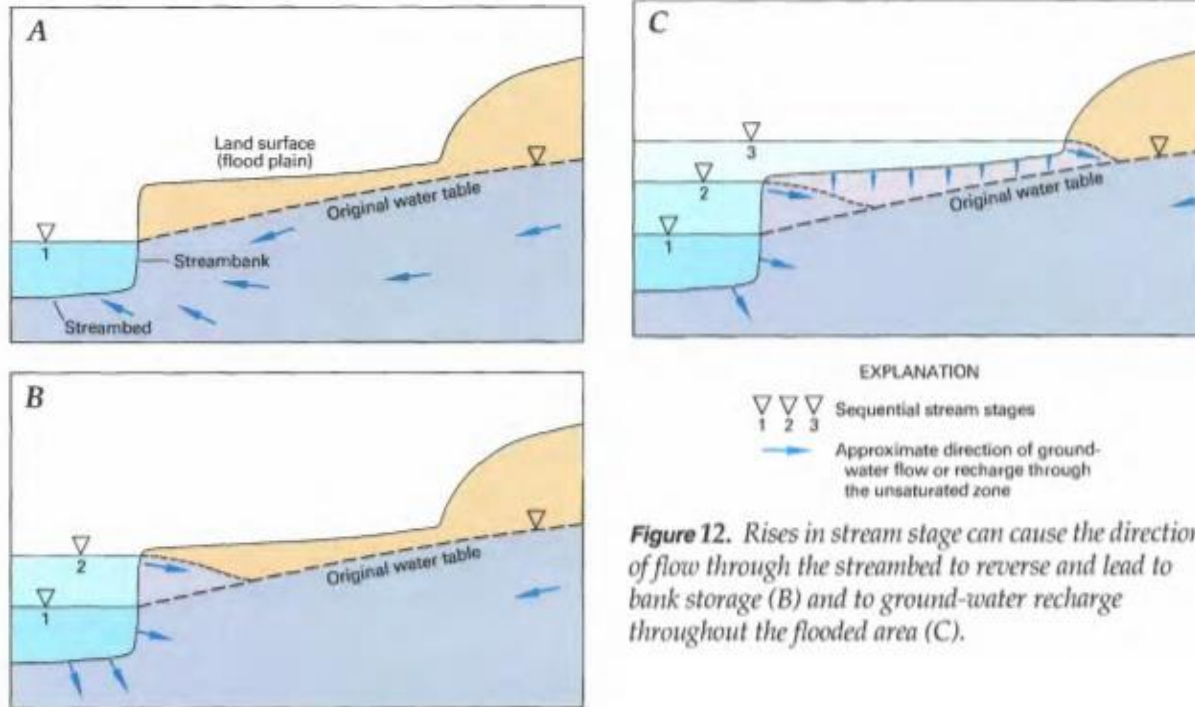


Figure 12. Rises in stream stage can cause the direction of flow through the streambed to reverse and lead to bank storage (B) and to ground-water recharge throughout the flooded area (C).

Randbedingungen: Grund- Flusswasserinteraktion

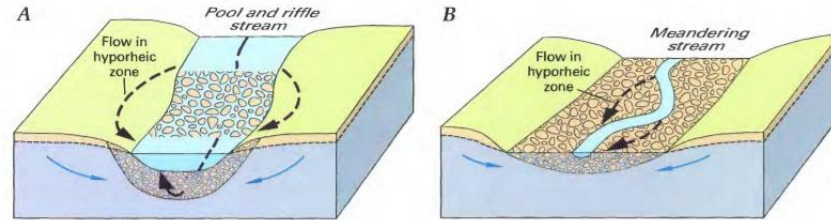


Figure 14. Surface-water exchange with groundwater in the hyporheic zone is associated with abrupt changes in streambed slope (A) and with stream meanders (B).



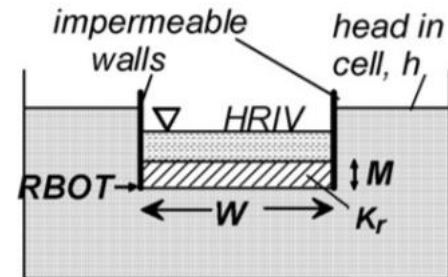
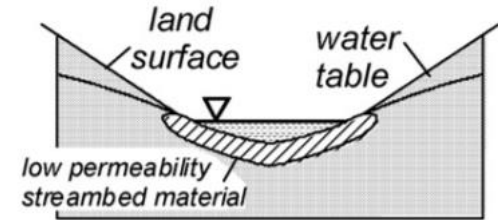
Pool and riffle stream in Colorado. (Photograph by Robert Broshears.)

<https://tinyurl.com/y25cutv8>

Randbedingungen: Grund- Flusswasserinteraktion

- „Leakage Condition“:
- $K \frac{\partial h(x,t)}{\partial n} = q_n(x) = c(h_0(x) - h(x))$
- h_0 könnte das Hydraulische Potential in einem Fluss oder einem See sein
- c ist ein Proportionalitätsfaktor („hydraulic conductance“), wovon hängt er ab?
- $C_{RIV} = cW = K_G LW / M$
 - K_G =hydraulische Leitfähigkeit der Kolmationsschicht zwischen Wasserkörper und Aquifer
 - L = Länge des Gewässerabschnitts
 - W = Breite des Flusses
 - M = Dicke der Kolmationsschicht

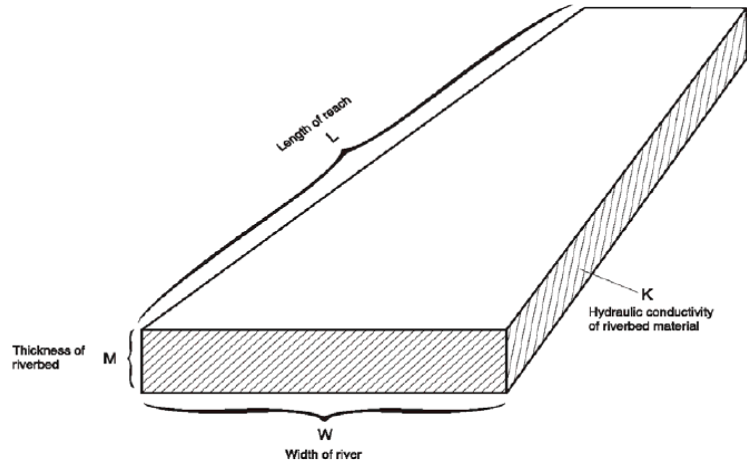
MODFLOW Implementation



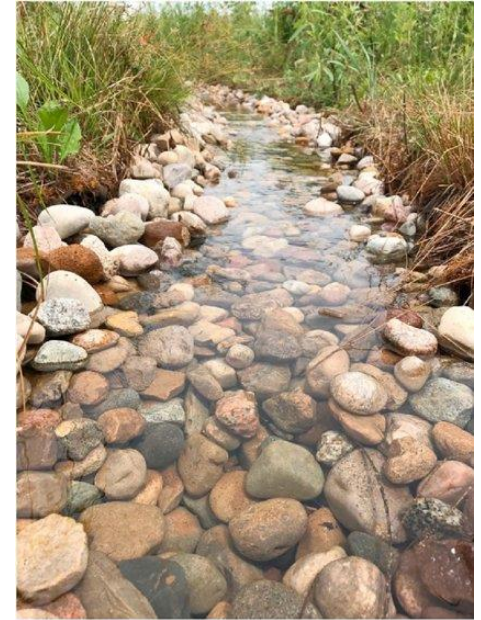
Rushton 2007

Randbedingungen: Grund- Flusswasserinteraktion

- Bitte beachten: $C = C(x, t)$



Harbaugh AW (2005) MODFLOW-2005, the U.S. Geological Survey modular ground-water model – the Ground-Water Flow Process. U.S. Geological Survey Techniques and Methods, 6-A16.



•DOI: [10.1029/2018JG004684](https://doi.org/10.1029/2018JG004684)

<https://tinyurl.com/4r5andta>

Randbedingungen Fluss-Grundwasserinteraktion: Exkurs Messung

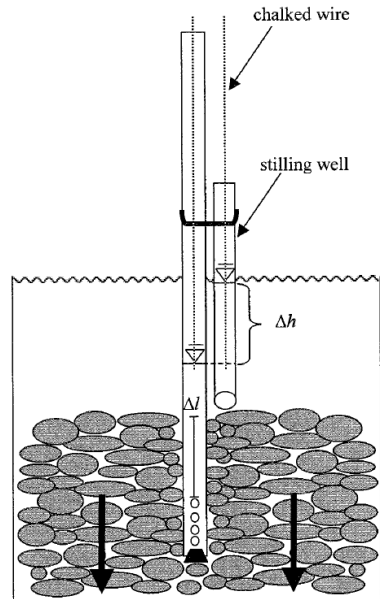
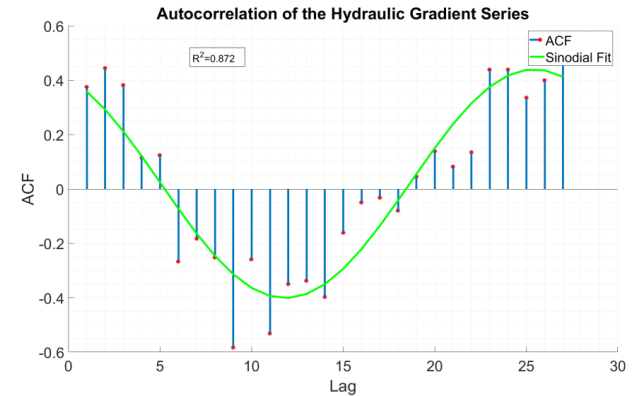
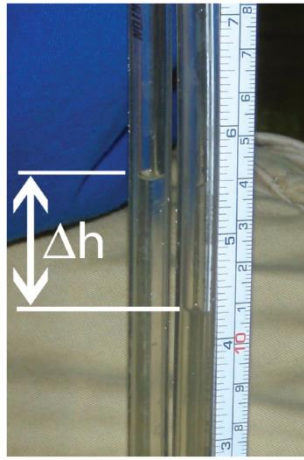
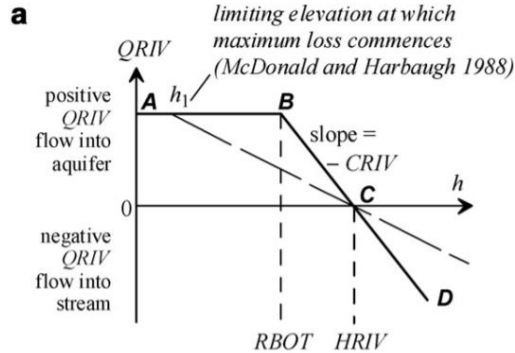


FIGURE 3.—Diagram of the stilling well and chalked wire setup used to measure the water level inside a minipiezometer and the stream water surface level at a site where downwelling occurs (see Figure 1 for definitions and additional explanation).



Grundwasser-Oberflächenwasser Interaktion

- $Q_{RIV}(x) = C_{RIV}(h_{RIV}(x) - h(x))$



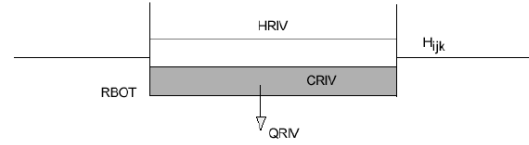
$$CRIV = KrLW/M$$

$$Q_{RIV} = CRIV (HRIV - RBOT), h \leq RBOT$$

$$Q_{RIV} = CRIV (HRIV - h), h > RBOT$$

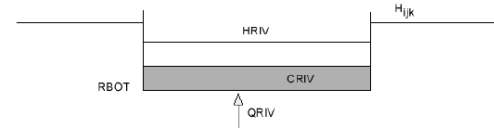
Rushton 2007

Hydraulisches Potential unter Flusswasserstand



$$Q_{RIV} = CRIV * (HRIV - H_{ijk})$$

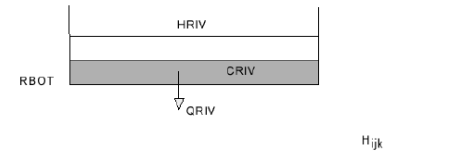
Hydraulisches Potential über Flusswasserstand



$$Q_{RIV} = CRIV * (HRIV - H_{ijk})$$

(-Q signifies flow out of cell)

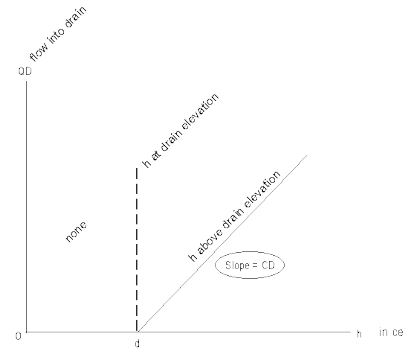
Hydraulisches Potential unter Flussbett (entkoppelt)
 → konstanter Grundwassermengenstrom über den Rand



Beachte: q [m/s]; Q [m³/s]

Grundwasser-Oberflächenwasser Interaktion: Drainagen, Quellen

- Es kann sinnvoll sein, nur Strömung aus dem GW System heraus zu erlauben
- $q(x) = 0$ wenn $h(x) < d$ oder
- $q(x) = c(h(x) - d)$ wenn $h(x) > d$
- „d“ ist das hydraulische Potential (=Höhe über Datum) des Entwässerungsgrabens
- Auch geeignet für periodische Flüsse und Quellen (dann aber als $Q(x)$ und als Quellterm



<https://tinyurl.com/2v8ej377>



<https://tinyurl.com/m494jees>



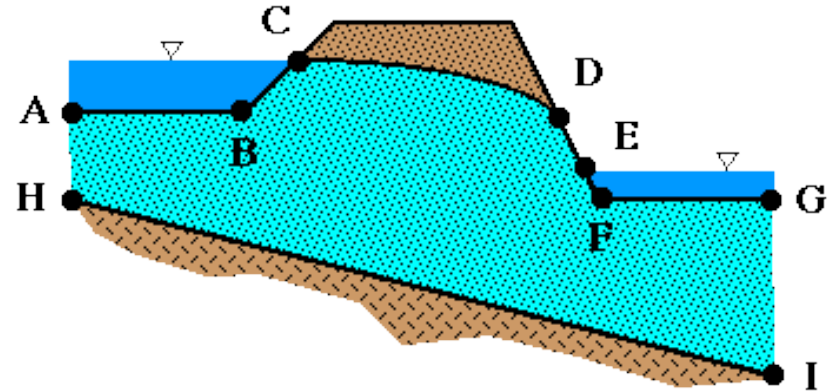
<https://tinyurl.com/7y4u74jr>



<https://tinyurl.com/dcwjwsdb>

Randbedingungen

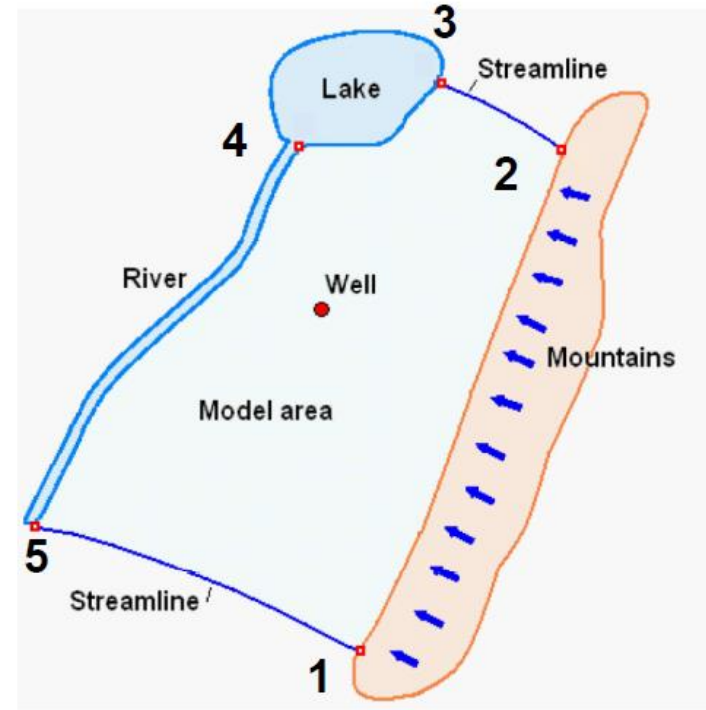
- Welche Randbedingungen für welche Randsegmente?
- AH Dirichlet
- ABC: Dirichlet/Robin
- CD: Neumann (GW Neubildung?)
- DE: Dirichlet (Wasserdruck=Luftdruck)
- EFG: Dirichlet/Robin
- GI: Dirichlet
- IH: Neumann (No-Flow)



<https://tinyurl.com/u4mm2dxs>

Randbedingungen

- 1-2: Neumann
- 2-3: Neumann (Zero-Flux)
- 5:1: Neumann (Zero-Flux)
- 3:4 Dirichlet
- 4:5 Robin



Engelhardt, TU Berlin

Initialbedingungen

- Erinnern wir uns an **V3: FDM und FEM Methoden**
- Es ist notwendig dem Modell Informationen über den Initialzustand zu übergeben : $h(x, t = t_0) = h_0(x)$
- Die Lösung passt sich normalerweise nach einer Einschwingzeit an das, durch die Randbedingungen, beschriebene Problem an, unabhängig der gewählten Initialbedingungen.
- Für Transiente Probleme kann die stationäre Lösung als Initialbedingung genutzt werden
- Initialbedingungen können genutzt werden um ein Problem in zeitlich verschobene Teilprobleme zu zerlegen (z.B. Tracer Injektions und Verteilungsphase, Pumpregimeänderungen)

FDM - explizites Schema

$$S_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - K_{i,j}^x \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} - K_{i,j}^y \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} = Q_{i,j} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n \\ &+ \frac{K_{i,j}^x \Delta t}{S_{i,j} \Delta x^2} u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n \\ &+ \frac{K_{i,j}^y \Delta t}{S_{i,j} \Delta y^2} u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n \\ &+ \frac{Q_{i,j} \Delta t}{S_{i,j}} \end{aligned} \quad (9)$$

V09 - Finite-Differenzen-Methode // 19.06.2020

Modellsenken und Modellquellen

$$S \frac{\partial H}{\partial t} - \text{div}[K \text{grad } H] - Q_V = 0$$

- Q_V =Senken/Quellenterm
- Physische Entitäten für Senken/Quellen sind vor allem:
 - Klimatische Grundwasserneubildung (und Teilkomponenten wie Niederschlag/Verdunstung)
 - Extraktions/Infiltrationsbrunnen
 - Versickerungsanlagen (Teiche etc)

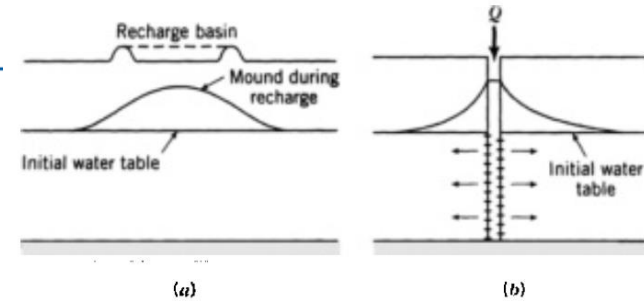


Figure 7.3 Schematic illustration of recharge through ba-

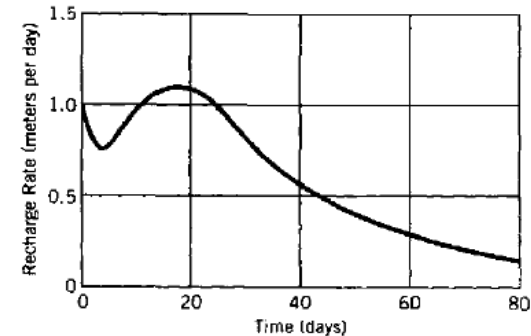
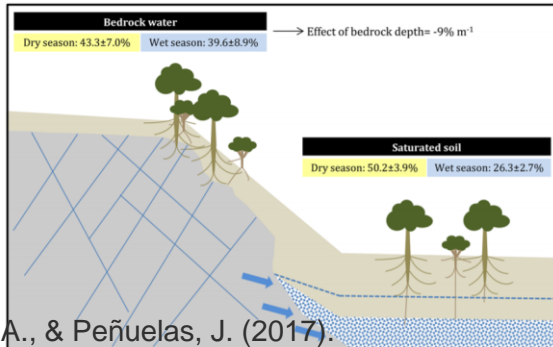


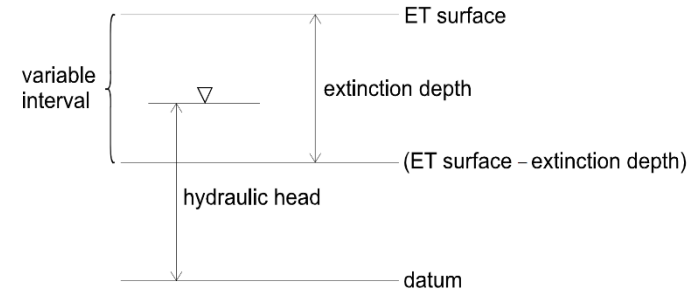
Figure 7.5 Time variation of recharge rate for water spreading on undisturbed soil (from Muckel, 1959).

Senkterm: Evapotranspiration

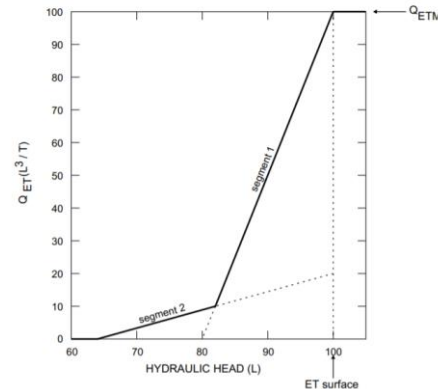
- Evapotranspiration aus dem GWL findet bis zu einer bestimmten Tiefe statt
- Hydraulisches Potential erreicht Geländehöhe bedeutet maximale EVT
- Max. Bodenverdunstungstiefe (ET) ~ 50cm (Maddrell, S., Neal, I., 2012)
- Anders bei Bepflanzung, max Tiefe ~ Wurzeltiefe + x cm



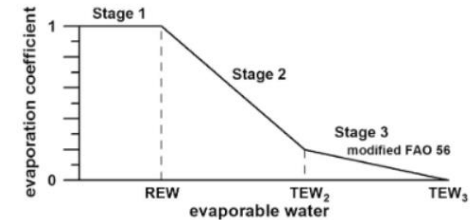
Barbeta, A., & Peñuelas, J. (2017).



$$Q_{ET} = Q_{ET}(x, z, t)$$



(b) three stages of evaporation coefficient

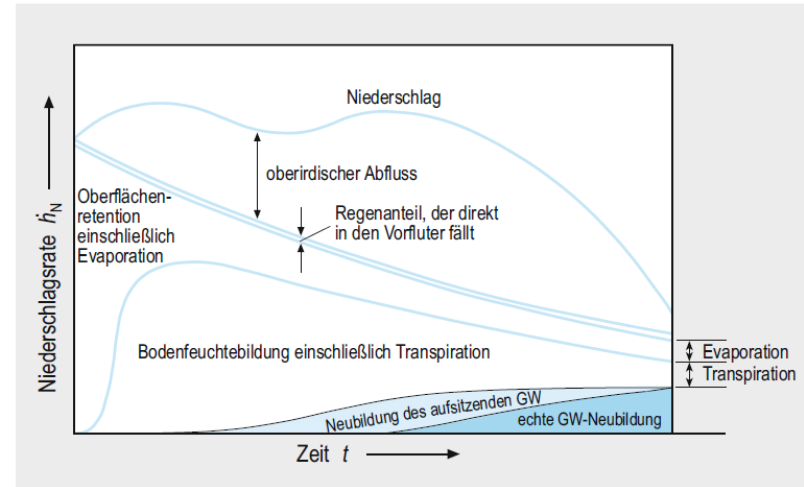
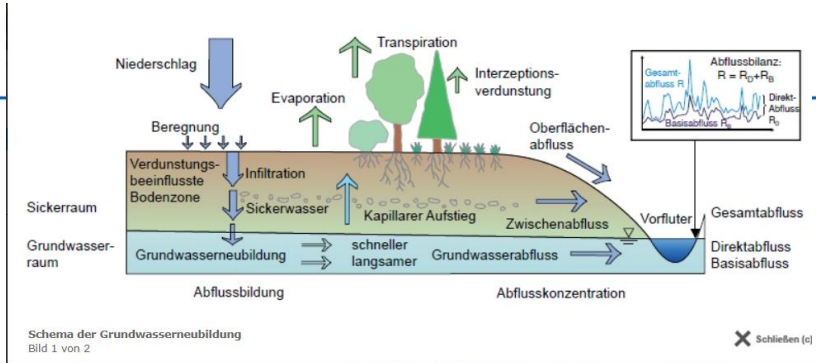


Mutziger, 2005

Quellterm Grundwasserneubildung

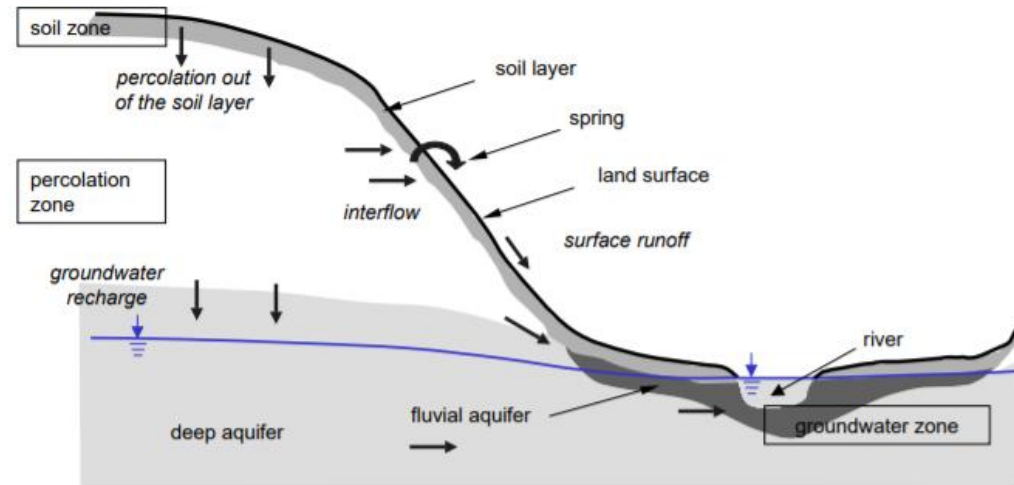
- **Infiltration** :Zugang von Wasser durch enge Hohlräume im Erdboden.
- **Perkolation**: Durchgang des Wassers durch den grundwasserfreien Sickerraum in den Grundwasserleiter
- **Grundwasserneubildung**: Gemäß DIN 4049-3 (1994) als "Zugang von infiltriertem Wasser zum Grundwasser" definiert und ist ein wichtiges Maß für die natürliche Regenerationsfähigkeit der Grundwasserressourcen
- **Grundwasserneubildung** ist eine dynamische heterogene Größe, die komplexe bodenhydraulische Prozesse widerspiegelt

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right]$$



Quellterm Grundwasserneubildung

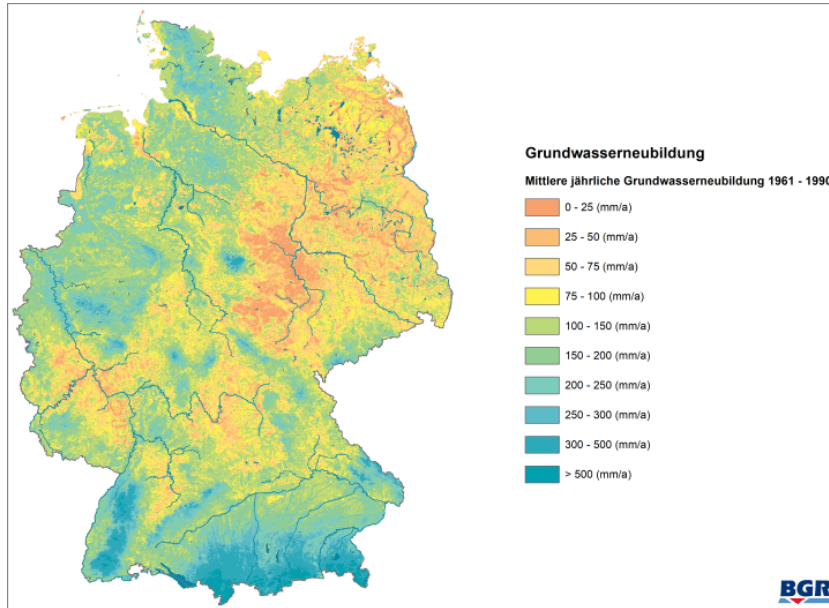
- Wasseraustritt aus der Bodenzone ist sowohl quantitativ und auch zeitlich nicht immer mit der Grundwasserneubildung identisch
- Effekt besonders deutlich im Oberlauf von Einzugsgebieten mit dünnen Bodenschichten und Kluftwasserleitern
- Einfluss auf die Kopplung hydrologischer und Grundwasserströmungsmodellen



Rojanschi, 2006

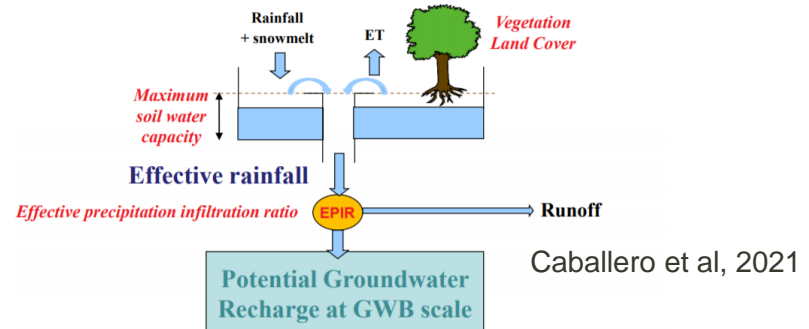
Quellterm Grundwasserneubildung : Bestimmung (Beispiele)

- Statische Karten nutzen



<https://tinyurl.com/ycm3yya8>

- Hydrologische Modellierung



- Messung über Lysimeter

