Lineare Algebra 1
PS1 bzw. PS2 bzw. PS3
WS 2015/16

Blatt 9, 14. Dezember 2015

1) Wie ist die *Hintereinanderausführung von Funktionen* definiert? Was ist eine *bijektive Funktion*? Was ist die *Umkehrfunktion* einer bijektiven Funktion?
Es seien
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Überprüfen Sie, ob die Funktionen
$$f : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}\,,\; z \longmapsto A \cdot z\,,$$
und
$$g : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}\,,\; z \longmapsto B \cdot z\,,$$
bijektiv sind. Wenn ja, ermitteln Sie deren Umkehrfunktionen. Beschreiben Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ sowie - falls f und g bijektiv sind - deren Umkehrfunktionen.

2) Was ist eine *Permutation*? Wie ist die *Hintereinanderausführung* von Permutationen definiert? Was ist ein *Zykel*? Was ist das *Vorzeichen* einer Permutation? Wie kann das Vorzeichen einer Permutation berechnet werden? Es seien
$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$
und
$$g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
zwei Permutationen. Berechnen Sie $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, g^{-1} und $g^2 := g \circ g$. Berechnen Sie das Vorzeichen dieser Permutationen. Schreiben Sie die Permutation
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 7 & 11 & 16 & 6 & 1 & 9 & 5 & 13 & 12 & 4 & 10 & 3 & 15 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$
als Produkt von disjunkten Zykeln und berechnen Sie das Vorzeichen der Permutation. Schreiben Sie diese Permutation als Produkt von Transpositionen.

3) Was ist die *Determinante* einer Matrix? Es seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix und B die Matrix, die man durch Addition der zweiten Zeile von A zur dritten erhält.
Zeigen Sie (durch Ausrechnen), dass die Determinanten von A und B gleich sind.
Zeigen Sie (durch Ausrechnen), dass die Determinante von $3A$ das 27-fache der Determinante von A ist.

4) Erläutern Sie das in Satz 186 angegebene Verfahren zur Berechnung von Determinanten. Berechnen Sie damit die Determinanten der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & -1 \\ -3 & -4 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$B := \begin{pmatrix} 555993 & 334567 & 345692 & 191919 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Welche Eigenschaften von Determinanten wurden in der Vorlesung besprochen?
Es seien A und B reelle 4×4-Matrizen mit $\det(A) = 2$ und $\det(B) = -5$. Berechnen Sie

$$\det(A^2 \cdot B^T \cdot A^T), \quad \det(-B \cdot A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^T),$$
$$\det(-3A) \quad \text{und} \quad \det(\frac{1}{3} \cdot B^2).$$

6) Wie kann man mit Hilfe der Determinante einer quadratischen Matrix entscheiden, ob diese invertierbar ist? Welche der folgenden reellen 2×2-Matrizen ist invertierbar? Versuchen Sie, das mit möglichst wenig Rechenaufwand zu entscheiden:

$$\begin{pmatrix} 197{,}568 & 349{,}344 \\ 231{,}456 & -451{,}122 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 324 & 689 \\ 138 & 261 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3{,}42 \cdot 10^5 & 1{,}67 \cdot 10^6 \\ 0{,}54 \cdot 10^4 & 1{,}23 \cdot 10^5 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie: Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen mit $a < b < c < d$ sind, dann ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

invertierbar.