Proseminar Lineare Algebra 1
WS 2011/12

12. bzw. 13. Dezember 2011

60) Wie ist die *Hintereinanderausführung von Funktionen* definiert? Was ist eine *bijektive Funktion*? Was ist die *Umkehrfunktion* einer bijektiven Funktion? Es seien

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\,,\ z \longmapsto -5z + 3\,,$$

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\,,\ z \longmapsto 3z - 1\,,$$

$$h : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\,,\ z \longmapsto (z-7)^2 - 12\,,$$

und

$$k : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3\,,$$

$$(a_1, a_2, a_3) \longmapsto (a_1+2a_2+3a_3, a_1+4a_2+9a_3, 1a_1+8a_2+27a_3)\,.$$

Welche dieser Funktionen sind bijektiv ? Schreiben Sie deren Umkehrfunktionen an.
Berechnen Sie die Zahlen $(f \circ h \circ f \circ h)(2)$ und $(h \circ f \circ h \circ f)(2)$, sowie ein Urbild von $(0, 1, 0)$ bezüglich k.

61) Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

Überprüfen Sie, ob die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}\,,\ z \longmapsto A \cdot z\,,$$

und

$$g : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}\,,\ z \longmapsto B \cdot z\,,$$

bijektiv sind. Wenn ja, ermitteln Sie deren Umkehrfunktionen. Wenn f und g bijektiv sind, beschreiben Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ sowie deren Umkehrfunktionen. Berechnen Sie $(f \circ g)(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ und $(g \circ f)(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

62) Sei V ein Vektorraum. Was ist eine *Translation* in V? Wie sind die Addition und die Skalarmultiplikation im Vektorraum aller Translationen von V definiert? Was ist ein *Pfeil* in V?
Betrachten Sie die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum und wählen Sie eine Basis (P, Q) dieses Vektoraums.
Die Translationen s und t sind durch $s(Q) = Q + P$ und $t(Q) = P$ definiert. Skizzieren Sie die Graphen von s, t und $s \circ t$, indem Sie einige Elemente dieser Graphen in die Ebene zeichnen.
Bilden die Translationen s und t eine Basis des Vektorraums aller Translationen der Ebene? Wenn ja, berechnen Sie die Koordinatenspalte der Translation r, die durch $r(0) = Q$ definiert ist, bezüglich dieser Basis.

63) Was ist eine *Permutation*? Wie ist die *Hintereinanderausführung* von Permutationen definiert? Es seien

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 3 & 9 & 8 & 4 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

und

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 6 & 3 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

zwei Permutationen. Berechnen Sie $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, g^{-1}, $f^2 := f \circ f$ und $g^2 := g \circ g$.

64) Was ist eine *Transposition*? Es seien $1 \leq i < j \leq n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$(i\ i{+}1)(i{+}1\ i{+}2) \ldots (j{-}2\ j{-}1)(j{-}1\ j)(j{-}1\ j{-}2) \ldots (i{+}1\ i) = (ij)$$

ist (z.B. ist $(34)(45)(56)(67)(65)(54)(43) = (37)$).
Schließen Sie daraus, dass jede Permutation in S_n das Produkt von Transpositionen der Form $(\ell\ \ell{+}1)$, $1 \leq \ell < n$, ist.

65) Was ist ein *Zykel*? Was ist das *Vorzeichen* einer Permutation? Wie kann das Vorzeichen einer Permutation berechnet werden? Schreiben Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 9 & 7 & 11 & 1 & 6 & 16 & 8 & 5 & 13 & 12 & 4 & 10 & 3 & 15 & 17 & 2 & 19 & 18 & 20 & 14 \end{pmatrix}$$

als Produkt von disjunkten Zykeln und berechnen Sie das Vorzeichen der Permutation. Schreiben Sie diese Permutation als Produkt von Transpositionen.