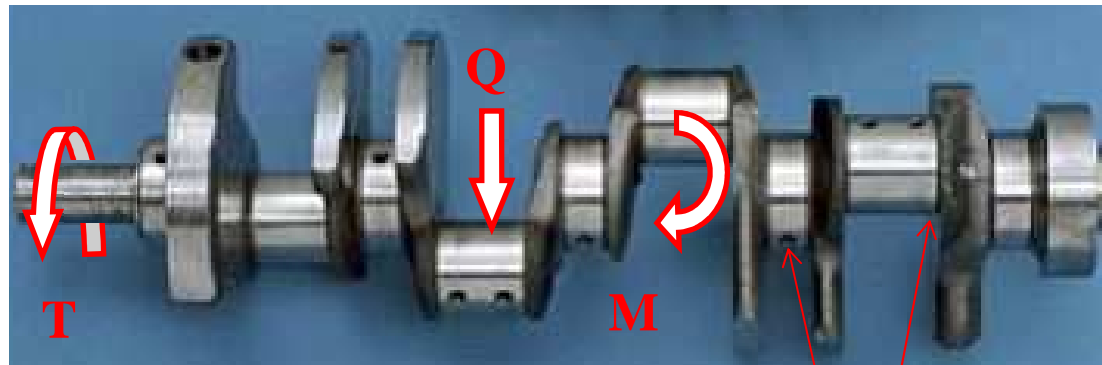


## 8. Beanspruchungskombinationen

In der Praxis unterliegen Bauteile oftmals einer überlagerten Beanspruchung infolge von Längs- und Querkräften, Biege- und Torsionsmomenten. Aus diesen Grundbeanspruchungsarten resultieren unterschiedliche Spannungsarten und Spannungsverteilungen, die bei der Auslegung zu beachten sind.



Kurbelwelle eines V8 Motors (aus: Wikipedia)

Zusätzlich muss unterschieden werden zwischen ruhender und wechselnder Beanspruchung, was insbesondere im Bereich von Kerben von Bedeutung ist.

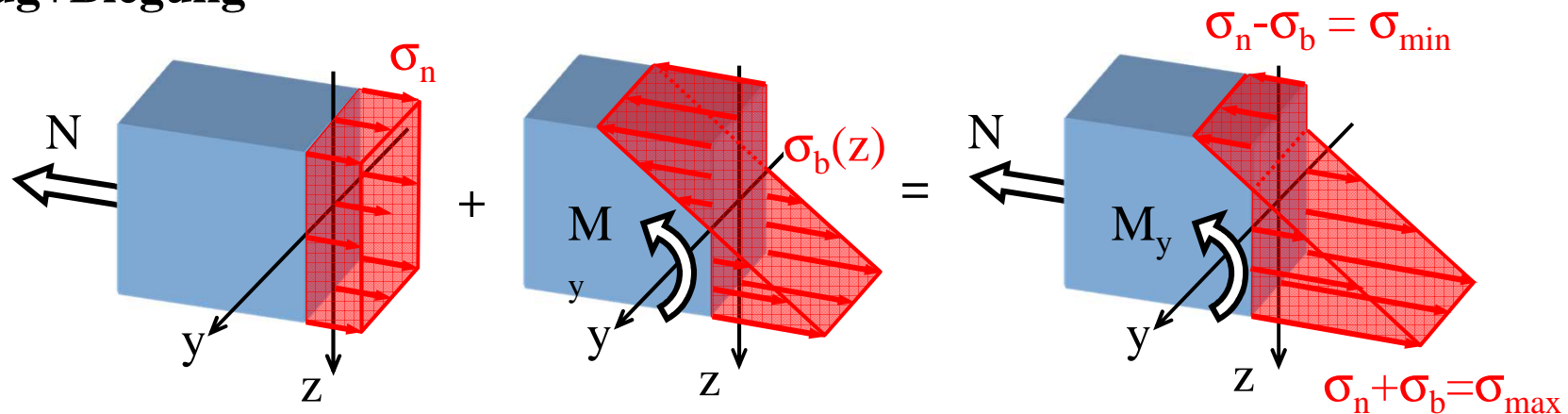
## 8.1 Kombination gleicher Spannungsarten

Gleiche Spannungsarten (Normalspannungen oder Schubspannungen), die in gleiche Richtung wirken, werden algebraisch (vorzeichenbehaftet) addiert.

### 8.1.1 Normalkraft und Biegung

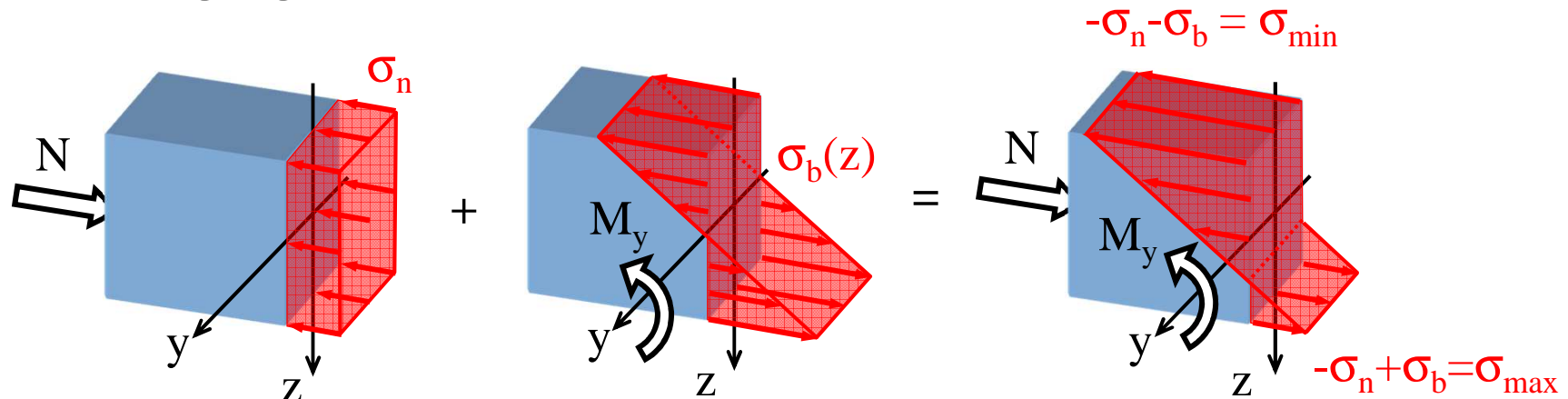
Zug- bzw. Druckkräfte als auch Biegemomente erzeugen Normalspannungen senkrecht zur gemeinsamen Schnittebene. Der Spannungszustand ist einachsig.

#### Zug+Biegung



Positive Normalspannungen erhöhen die Spannungen an der Biezugseite.

## Druck+Biegung



Negative Normalspannungen vermindern die Spannungen an der Biegezugseite. Das lässt sich vorteilhaft für die Auslegung eines biegebeanspruchten Bauteils nutzen, da insbesondere bei wechselnder Beanspruchung i. allg. die ertragbaren Zugspannungen deutlich kleiner sind als die zulässigen Druckspannungen.

Weiterhin ist zu beachten, dass bei der Kombination aus Normal- und Biegebeanspruchung die spannungsfreie (neutrale) Faser vom Schwerpunkt der Querschnittsfläche zu den Rändern hin verschoben ist.

Bei Überlagerung von Normalkraft und Biegung ergibt sich somit die Spannungsverteilung

$$\sigma(z) = \sigma_n + \sigma_b(z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

mit der Normalkraft  $N$ , der Querschnittsfläche  $A$ , dem Biegemoment  $M_b$  und dem Flächenträgheitsmoment  $I_y$ . Das Vorzeichen der Spannung ergibt sich richtig, wenn die Schnittgrößen nach Vorzeichenkonvention und die Koordinate  $z$  vorzeichengerecht eingetragen werden.

Für die Randfaser lautet die Festigkeitsbedingung somit aus

$$\sigma = |\sigma_n| + |\sigma_b| = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_b|}{W_b} \leq S_{zul}$$

mit der der zulässigen Spannung  $S_{zul}$ .



### Beispiel: Träger mit exzentrisch angreifender Zugkraft

**Gegeben:**  $F = 120 \text{ kN}$ ,  $b = 50 \text{ mm}$ ,  $h = 600 \text{ mm}$

**Gesucht:** Spannungsverteilung und Randspannungen

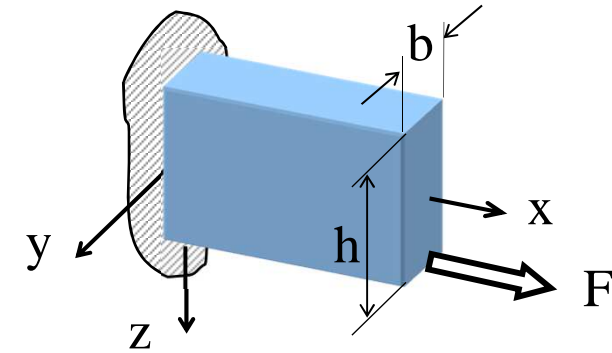
$$M_y = F \cdot \frac{h}{2} = 1,2 \cdot 10^5 \cdot 300 = 3,6 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$$

$$A = b \cdot h = 50 \cdot 600 = 30000 \text{ mm}^2$$

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{50 \cdot 600^3}{12} = 9 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma(z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z = \frac{1,2 \cdot 10^5}{30000} + \frac{3,6 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^8} \cdot z = 4 + 0,04 \cdot z$$

$$\sigma_{\max} = 4 + 0,04 \cdot 300 = 16 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_{\min} = 4 - 0,04 \cdot 300 = -8 \text{ N/mm}^2$$



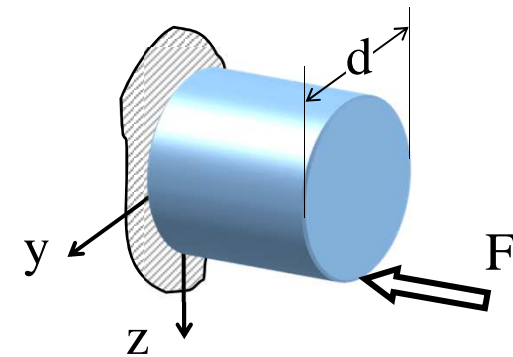
### Übung: Welle mit exzentrisch angreifender Druckkraft

**Gegeben:**  $F = 200 \text{ kN}$ ,  $d = 100 \text{ mm}$

**Gesucht:** Randspannungen

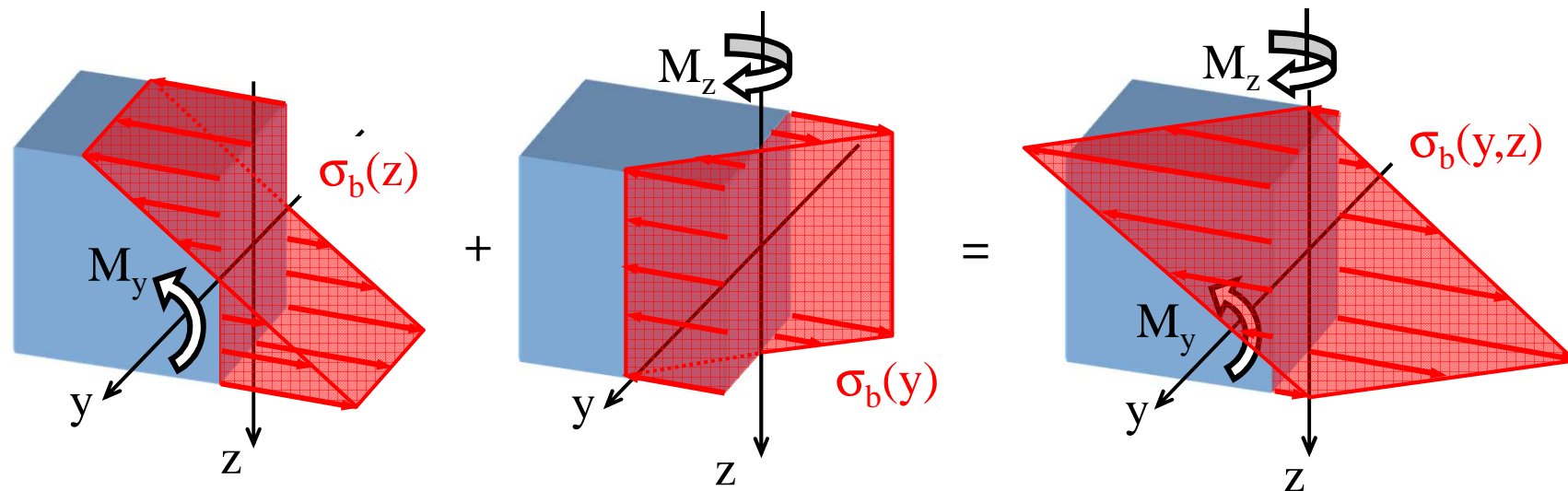
$$\sigma(z) = -\frac{2 \cdot 10^5}{7854} - \frac{10^7}{4908738} \cdot z = -25,5 - 2,037 \cdot z$$

$$\sigma_{\min} = -127,4 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_{\max} = 75,6 \text{ N/mm}^2$$



## 8.1.2 Zweiachsige Biegung

Treten an einem Träger Querkräfte bzw. Momente um die  $y$ - und  $z$ -Achse auf, so die sind die Biegespannungen sowohl in  $y$ - als auch in  $z$ -Richtung linear veränderlich. Es handelt sich ebenfalls um einen einachsigen Spannungszustand.



Die Biegespannungen werden in der Schnittebene algebraisch (vorzeichenbehaftet) addiert. Der resultierende Spannungsverlauf stellt eine geneigte Ebene dar, deren Funktion sowohl von  $y$ - als auch von der  $z$ -Koordinate abhängt.

Der Spannungsverlauf ergibt sich aus

$$\sigma_b(y, z) = \sigma_b(z) + \sigma_b(y) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

mit den Biegemoment  $M_y$  und  $M_z$  sowie den Flächenträgheitsmoment  $I_y$  und  $I_z$ . Das Vorzeichen der Spannung ergibt sich aus der Rechnung, wenn die Biegemomente nach Vorzeichenkonvention und die Koordinaten  $y$  und  $z$  vorzeichengerecht eingetragen werden. Wirkt zusätzlich eine Normalkraft auf die Fläche  $A$  gilt

$$\sigma(y, z) = \sigma_n + \sigma_b(z) + \sigma_b(y) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Für die Randfaser lautet die Festigkeitsbedingung somit

$$\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq S_{\text{zul}}$$

Der Normalkraftanteil ist gegenüber den Biegemomenten häufig vernachlässigbar



## Beispiel: Träger unter exzentrisch Druckkraft

**Gegeben:**  $F = 180 \text{ kN}$ ,  $b = 60 \text{ mm}$ ,  $h = 100 \text{ mm}$

**Gesucht:** Spannungen in den Eckpunkten 1 bis 4

Querschnittswerte:

$$A = b \cdot h = 60 \cdot 100 = 6000 \text{ mm}^2$$

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{60 \cdot 100^3}{12} = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

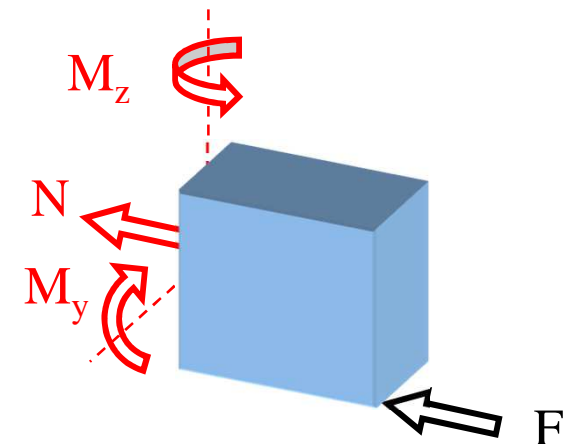
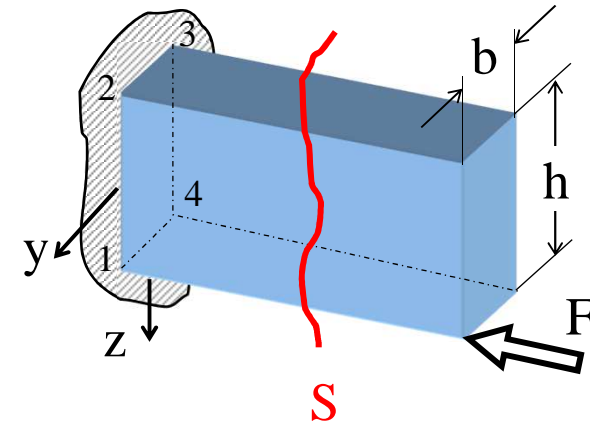
$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{60^3 \cdot 100}{12} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0 = -N - F \quad \Rightarrow N = -F$$

$$\sum M_y^S = 0 = -M_y - F \cdot \frac{h}{2} \quad \Rightarrow M_y = -F \cdot \frac{h}{2} = -9 \text{ kNm}$$

$$\sum M_z^S = 0 = M_z - F \cdot \frac{b}{2} \quad \Rightarrow M_z = F \cdot \frac{b}{2} = 5,4 \text{ kNm}$$





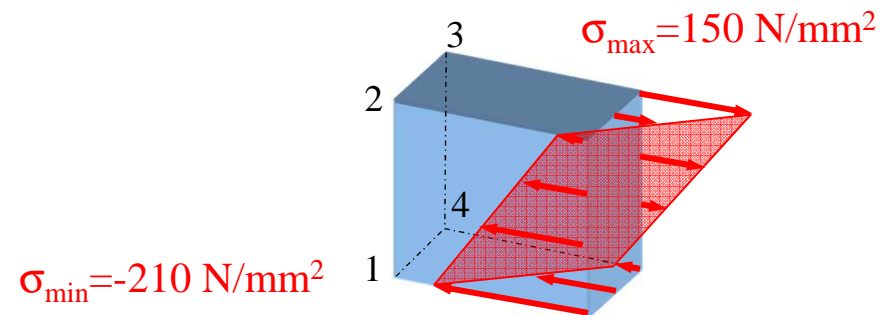
...Fortsetzung

$$\sigma_{(1)} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{h}{2} - \frac{M_z}{I_z} \cdot \frac{b}{2} = \frac{-1,8 \cdot 10^5}{6000} + \frac{-9 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^6} \cdot 50 - \frac{5,4 \cdot 10^6}{1,8 \cdot 10^6} \cdot 30 = -210 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{-h}{2} - \frac{M_z}{I_z} \cdot \frac{b}{2} = \frac{-1,8 \cdot 10^5}{6000} + \frac{9 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^6} \cdot 50 - \frac{5,4 \cdot 10^6}{1,8 \cdot 10^6} \cdot 30 = -30 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{(3)} = -30 + 90 + 90 = 150 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{(4)} = -30 - 90 + 90 = -30 \text{ N/mm}^2$$



Festigkeitsbedingung:

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{60 \cdot 100^2}{6} = 10^5 \text{ mm}^3 \quad W_z = \frac{b^2 \cdot h}{6} = \frac{60^2 \cdot 100}{6} = 6 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

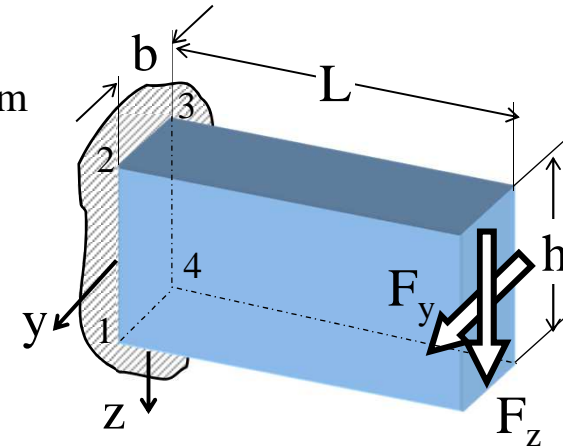
$$\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{1,8 \cdot 10^5}{6000} + \frac{9 \cdot 10^6}{10^5} + \frac{5,4 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^4} = 210 \text{ N/mm}^2$$



## Übung: Träger unter zweiachsiger Querkraft

**Gegeben:**  $F_y = 10 \text{ kN}$ ,  $F_z = 20 \text{ kN}$ ,  $b = 60 \text{ mm}$ ,  $h = 100 \text{ mm}$ ,  $L = 1 \text{ m}$

**Gesucht:** Spannungen in den Eckpunkten 1-4



$$\sum M_y^A = 0 = -M_y - F_z \cdot L \quad \Rightarrow M_y = -F_z \cdot L = -20 \text{ kNm}$$

$$\sum M_z^A = 0 = M_z - F_y \cdot L \quad \Rightarrow M_z = F_y \cdot L = 10 \text{ kNm}$$

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{60 \cdot 100^3}{12} = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{60^3 \cdot 100}{12} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{b(1)} = \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{h}{2} - \frac{M_z}{I_z} \cdot \frac{b}{2} = \frac{-2 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^6} \cdot 50 - \frac{10^7}{1,8 \cdot 10^6} \cdot 30 = -367 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{\min}$$

$$\sigma_{b(2)} = \frac{M_y}{I_y} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) - \frac{M_z}{I_z} \cdot \frac{b}{2} = \frac{-2 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^6} \cdot (-50) - \frac{10^7}{1,8 \cdot 10^6} \cdot 30 = 33 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{b(3)} = 367 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{\max} \quad \sigma_{b(4)} = -33 \text{ N/mm}^2$$

## 8.2 Kombination ungleicher Spannungsarten

Unterschiedliche Spannungsarten (Normalspannungen und Schubspannungen) werden durch Vergleichsspannungen zusammengefasst.

### 8.2.1 Normalkraft und Torsion

Für die Kombination aus Normalspannung infolge einer Druck- bzw. Zugkraft  $N$  und Schubspannung durch ein Torsionsmoment  $T$  ergeben sich die Vergleichsspannungen aus dem einachsigen Spannungszustand

$$\sigma_v^{SH} = \sqrt{\sigma_n^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{T}{W_t}\right)^2} \leq S_{zul}$$

$$\sigma_v^{GEH} = \sqrt{\sigma_n^2 + 3 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{T}{W_t}\right)^2} \leq S_{zul}$$

mit der Querschnittsfläche  $A$  und dem Torsionswiderstandsmoment  $W_t$ .

## Beispiel: Welle unter Zugkraft und Torsion

**Gegeben:**  $F = 50 \text{ kN}$ ,  $T = 1 \text{ kNm}$ ,  $d = 50 \text{ mm}$

**Gesucht:** Vergleichsspannungen

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 50^3}{16} = 24544 \text{ mm}^3$$

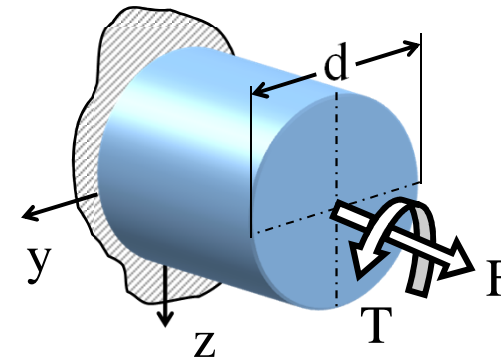
$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 50^2}{4} = 1964 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_n = \frac{F}{A} = \frac{5 \cdot 10^4}{1964} = 25,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_t = \frac{T}{W_p} = \frac{10^6}{24544} = 40,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_v^{SH} = \sqrt{\sigma_n^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{25,5^2 + 4 \cdot 40,7^2} = 85,4 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_v^{GEH} = \sqrt{\sigma_n^2 + 3 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{25,5^2 + 3 \cdot 40,7^2} = 75,0 \text{ N/mm}^2$$



## 8.2.2 Biegung und Torsion

Für die Kombination aus Normalspannung infolge eines Biegemoments  $M_b$  und Schubspannung durch ein Torsionsmoment  $T$  ergeben sich die Vergleichsspannungen ebenfalls aus dem einachsialen Spannungszustand

$$\sigma_v^{SH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{\left(\frac{M_b}{W_b}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{T}{W_t}\right)^2} \leq S_{zul}$$

$$\sigma_v^{GEH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{\left(\frac{M_b}{W_b}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{T}{W_t}\right)^2} \leq S_{zul}$$

mit den Biege­wider­stands­moment  $W_b$  und dem Torsions­wider­stands­moment  $W_t$ .

Die Kombination aus Biegemoment und Torsionsmoment tritt häufig bei Antriebswellen auf und stellt den auslegungsrelevanten Lastfall dar.

## Beispiel: Hohlwelle unter Biegung und Torsion

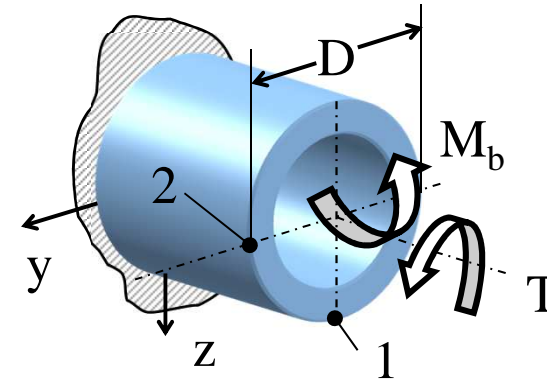
**Gegeben:**  $M_b = 1 \text{ kNm}$ ,  $T = 1,5 \text{ kNm}$ ,  $D = 50 \text{ mm}$ ,  $s = 5 \text{ mm}$

**Gesucht:** Vergleichsspannungen an den Stellen 1 und 2

$$W_b = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot D} = \frac{\pi \cdot (50^4 - 40^4)}{32 \cdot 50} = 7245 \text{ mm}^3$$

$$W_p = 2 \cdot W_b = 14491 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{10^6}{7245} = 138 \text{ N/mm}^2 \quad \tau_t = \frac{T}{W_p} = \frac{1,5 \cdot 10^6}{14491} = 104 \text{ N/mm}^2$$



Stelle 1  $\sigma_v^{SH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{138^2 + 4 \cdot 104^2} = 250 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma_v^{GEH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{138^2 + 3 \cdot 104^2} = 227 \text{ N/mm}^2$$

Stelle 2  $\sigma_v^{SH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{0^2 + 4 \cdot 104^2} = 2 \cdot 104 = 208 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma_v^{GEH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{3 \cdot 104^2} = \sqrt{3} \cdot 104 = 180 \text{ N/mm}^2$$

## 8.2.3 Innendruck und Torsion

Für ein dünnwandiges Rohr unter Innendruck  $p_i$  und und gleichzeitig wirkendem Torsionsmoment  $T$  ergeben sich die Vergleichsspannungen aus

$$\sigma_v^{SH} = \sqrt{\sigma_t^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{\left(\frac{p_i \cdot d_i}{2 \cdot s}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{T}{W_p}\right)^2} \leq S_{zul}$$

$$\sigma_v^{GEH} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_t^2 - \sigma_a \cdot \sigma_t + 3 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{p_i \cdot d_i}{4 \cdot s}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{T}{W_p}\right)^2} \leq S_{zul}$$

mit dem Innendurchmesser  $d_i$ , der Wandstärke  $s$  und dem polaren Widerstandsmoment  $W_p$ .

Es handelt sich um einen ebenen Spannungszustand mit der Axialspannung  $\sigma_a$  und der Tangentialspannung  $\sigma_t$  durch Innendruck und der Schubspannung  $\tau_t$  infolge Torsion.

## Beispiel: Rohr unter Innendruck und Torsion

**Gegeben:**  $p_i = 100 \text{ bar}$ ,  $T = 15 \text{ kNm}$ ,  $D = 150 \text{ mm}$ ,  $s = 5 \text{ mm}$

**Gesucht:** Vergleichsspannungen nach SH und GEH

$$W_p = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D} = \frac{\pi \cdot (150^4 - 140^4)}{16 \cdot 150} = 159815 \text{ mm}^3$$

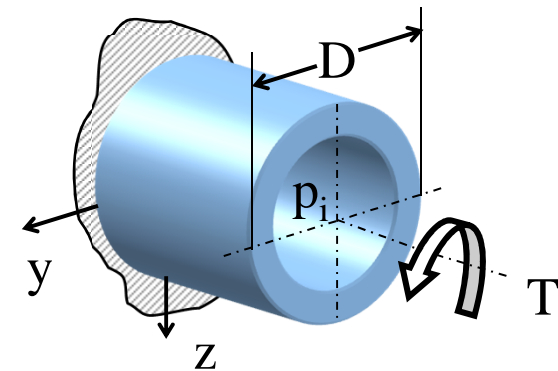
$$\tau_t = \frac{T}{W_p} = \frac{15 \cdot 10^6}{159815} = 94 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_a = \frac{p_i \cdot d_i}{4 \cdot s} = \frac{10 \cdot 140}{4 \cdot 5} = 70 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_t = 2 \cdot \sigma_a = 140 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_v^{\text{SH}} = \sqrt{\sigma_t^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{140^2 + 4 \cdot 94^2} = 234 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_v^{\text{GEH}} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_t^2 - \sigma_a \cdot \sigma_t + 3 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{70^2 + 140^2 - 70 \cdot 140 + 3 \cdot 94^2} = 203 \text{ N/mm}^2$$





## 8.2.4 Innendruck und Biegung

Für ein dünnwandiges Rohr unter Innendruck  $p_i$  und gleichzeitig wirkendem Biegemoment  $M_b$  müssen bei der SH je nach Vorzeichen der Biegespannung Fallunterscheidungen getroffen werden:

$$\sigma_v^{SH} = \max. \left\{ \begin{array}{l} \sigma_a + \sigma_b \\ \sigma_t \end{array} \right\} \leq S_{zul}$$

Für die GEH sind keine Fallunterscheidungen zu treffen

$$\sigma_v^{GEH} = \sqrt{(\sigma_a + \sigma_b)^2 + \sigma_t^2} - (\sigma_a + \sigma_b) \cdot \sigma_t \leq S_{zul}$$

Die Biegespannungen sind in die Gleichungen mit positiven Vorzeichen einzutragen.

## Beispiel 1: Rohr unter Innendruck und Biegung

**Gegeben:**  $p_i = 80 \text{ bar}$ ,  $M_b = 10 \text{ kNm}$ ,  $D = 150 \text{ mm}$ ,  $s = 5 \text{ mm}$

**Gesucht:** Vergleichsspannungen nach GEH am Umfang

$$W_b = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot D} = \frac{\pi \cdot (150^4 - 140^4)}{32 \cdot 150} = 79908 \text{ mm}^3$$

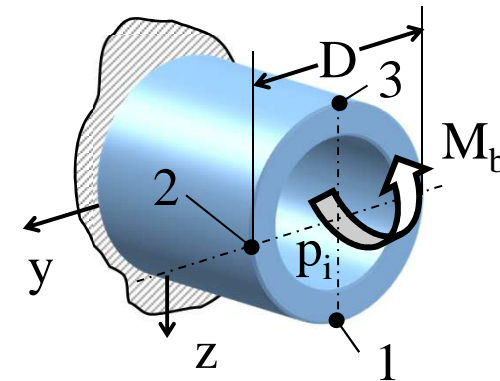
$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{10^7}{79908} = 125 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_a = \frac{p_i \cdot d_i}{4 \cdot s} = \frac{8 \cdot 140}{4 \cdot 5} = 56 \text{ N/mm}^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{v1}^{GEH} &= \sqrt{(\sigma_a + \sigma_b)^2 + \sigma_t^2 - (\sigma_a + \sigma_b) \cdot \sigma_t} \\ &= \sqrt{181^2 + 112^2 - 181 \cdot 112} = 158 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_{v2}^{GEH} = \sqrt{(\underbrace{\sigma_a + \sigma_b}_{=0})^2 + \sigma_t^2 - (\underbrace{\sigma_a + \sigma_b}_{=0}) \cdot \sigma_t} = \sqrt{56^2 + 112^2 - 56 \cdot 112} = 97 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{v3}^{GEH} = \sqrt{(\sigma_a - \sigma_b)^2 + \sigma_t^2 - (\sigma_a - \sigma_b) \cdot \sigma_t} = \sqrt{69^2 + 112^2 + 69 \cdot 112} = 158 \text{ N/mm}^2$$

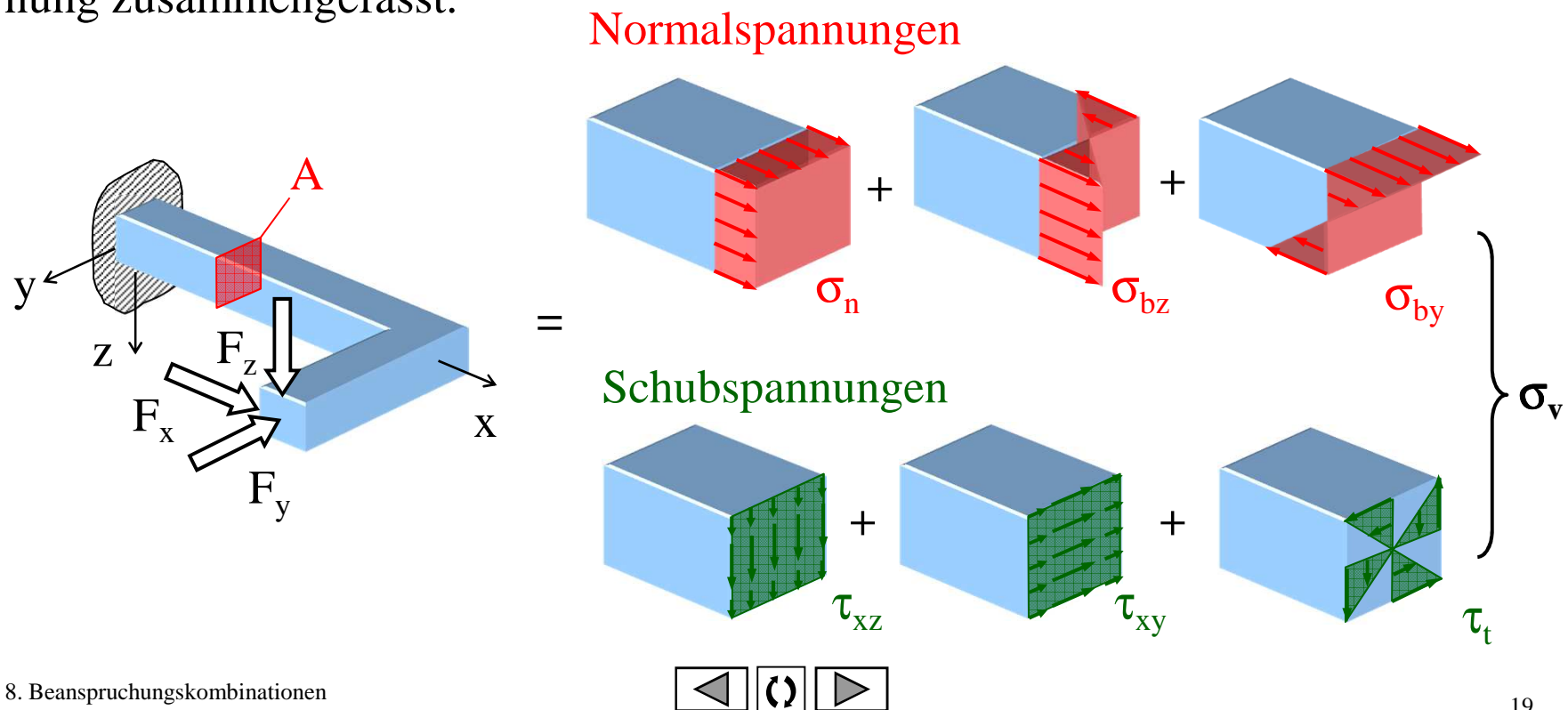


$$\sigma_t = 2 \cdot \sigma_a = 112 \text{ N/mm}^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_v^{SH} &= \max. \begin{Bmatrix} \sigma_a + \sigma_b \\ \sigma_t \end{Bmatrix} = \max. \begin{Bmatrix} 56 + 125 \\ 112 \end{Bmatrix} \\ &= 181 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

## 8.3 Allgemeine Spannungskombinationen

Axialkräfte, Innendruck und Biegemomente erzeugen Normalspannungen, Querkräfte und Torsionsmomente Schubspannungen. In einem Punkt eines Bauteils werden gleiche Spannungsarten mit gleicher Orientierung zunächst algebraisch addiert und anschließend die Spannungskomponenten zu einer Vergleichsspannung zusammengefasst.



## Beispiel: Rohrbogen unter Innendruck und Einzellasten

**Gegeben:**  $F_x = 5 \text{ kN}$ ,  $F_z = 10 \text{ kN}$ ,  $p_i = 50 \text{ bar}$ ,  $a = 300 \text{ mm}$ ,  $b = 200 \text{ mm}$ ,  $D = 100 \text{ mm}$ ,  $s = 2,5 \text{ mm}$

**Gesucht:** Vergleichsspannungen nach GEH in den Punkten 1 und 2

$$W_b = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot D} = \frac{\pi \cdot (100^4 - 95^4)}{32 \cdot 100} = 18210 \text{ mm}^3$$

$$W_p = 2 \cdot W_b = 36420 \text{ mm}^2$$

$$A = \pi \cdot (D^2 - d^2) / 4 = \pi \cdot (100^2 - 95^2) / 4 = 766 \text{ mm}^2$$

Normal-  
kraft:

$$\sigma_n = \frac{N}{A} = \frac{F_x}{A} = \frac{5 \cdot 10^3}{766} = 7 \text{ N/mm}^2$$

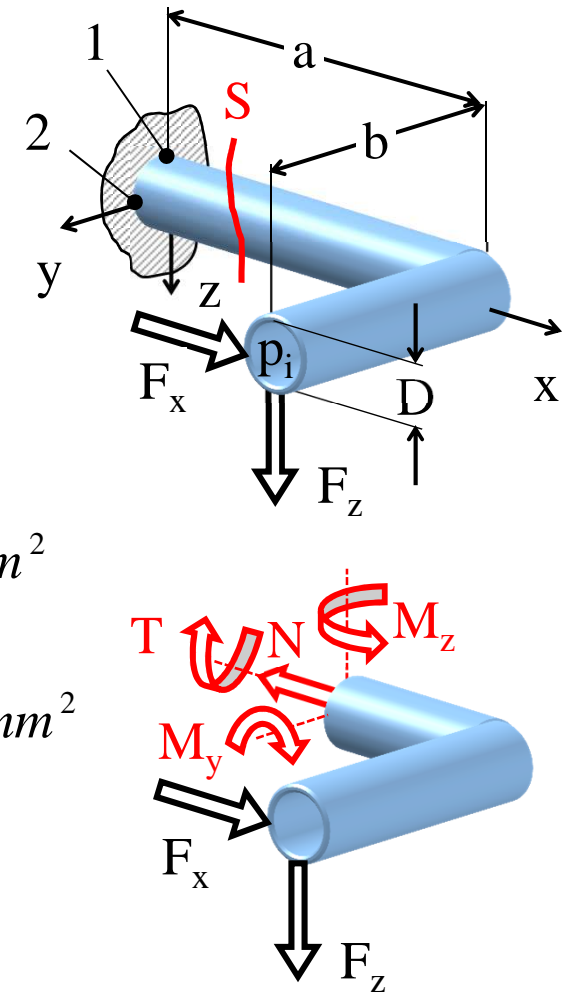
Biegung:

$$\sigma_{by} = \frac{M_y}{W_b} = \frac{F_z \cdot a}{W_b} = \frac{10^4 \cdot 300}{18210} = 165 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bz} = \frac{M_z}{W_b} = \frac{F_x \cdot b}{W_b} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 200}{18210} = 55 \text{ N/mm}^2$$

Torsion:

$$\tau_t = \frac{T}{W_p} = \frac{F_z \cdot b}{W_p} = \frac{10^4 \cdot 200}{36420} = 55 \text{ N/mm}^2$$





### ...Fortsetzung:

Quer-  
kraft:  $\tau_s = \frac{4 \cdot Q}{3 \cdot A} = \frac{4 \cdot F_z}{3 \cdot A} = \frac{4 \cdot 10^4}{3 \cdot 766} = 17 \text{ N/mm}^2$

Innen-  
druck:  $\sigma_a = \frac{p_i \cdot d}{4 \cdot s} = \frac{5 \cdot 95}{4 \cdot 2,5} = 47,5 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma_t = 2 \cdot \sigma_a = 95 \text{ N/mm}^2$$

Stelle 1:  $\sigma_x = \sigma_n + \sigma_a + \sigma_{by} = 7 + 47,5 + 165 = 219,5 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma_y = \sigma_t = 95 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{xy} = \tau_t = 55 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{v1}^{GEH} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} = \sqrt{219,5^2 + 95^2 - 219,5 \cdot 95 + 3 \cdot 55^2} = 213 \text{ N/mm}^2$$

Stelle 2:  $\sigma_x = \sigma_n + \sigma_a + \sigma_{bz} = 7 + 47,5 + 55 = 109,5 \text{ N/mm}^2$

$$\tau_{xy} = \tau_t + \tau_s = 55 + 17 = 72 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{v2}^{GEH} = \sqrt{109,5^2 + 95^2 - 109,5 \cdot 95 + 3 \cdot 72^2} = 162 \text{ N/mm}^2$$

## Übung: Abgewinkelter Stab unter Vertikallast

**Gegeben:**  $F = 2 \text{ kN}$ ,  $a = 150 \text{ mm}$ ,  $b = 100 \text{ mm}$ ,  $d = 25 \text{ mm}$

**Gesucht:** Vergleichsspannungen nach SH in den Punkten 1 und 2

$$\sigma_b = \frac{M}{W_b} = \frac{32 \cdot F \cdot a}{\pi \cdot d^3} = \frac{32 \cdot 2000 \cdot 150}{\pi \cdot 25^3} = 196 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_t = \frac{T}{W_p} = \frac{16 \cdot F \cdot b}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 2000 \cdot 100}{\pi \cdot 25^3} = 65 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_s = \frac{4 \cdot Q}{3 \cdot A} = \frac{4 \cdot 4 \cdot F}{3 \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{16 \cdot 2000}{3 \cdot \pi \cdot 25^2} = 5 \text{ N/mm}^2$$

Stelle 2:  $\sigma_x = \sigma_b = 196 \text{ N/mm}^2$      $\tau_{xy} = \tau_t + \tau_s = 65 + 5 = 70 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma_{v1}^{SH} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \sqrt{196^2 + 4 \cdot 70^2} = 241 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{v2}^{SH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot (\tau_t + \tau_s)^2} = 2 \cdot (\tau_t + \tau_s) = 2 \cdot (65 + 5) = 140 \text{ N/mm}^2$$

