Authentische Erfahrungen mit Mathematik durch historische Quellen

Britta Habdank-Eichelsbacher & Hans Niels Jahnke, Universität Bielefeld

Mathematikgeschichte als Bestandteil eines zukunftsorientierten Mathematikunterrichts

In der veröffentlichten Diskussion über die Bedeutung der Mathematik gibt es erhebliche Defizite. Ihre zentrale Rolle in Alltag, Technik, Wissenschaft und Kultur wird zwar gesehen, doch im Allgemeinen nicht verstanden. Dies führt zu verbreiteten und erheblichen Vorbehalten.

Die hervorgehobene Stellung des Mathematikunterrichts an unseren allgemeinbildenden Schulen wird dadurch sicher nicht gefährdet. Ein Auf und Ab in der Beurteilung mag sogar von Nutzen sein, weil es die Bereitschaft zu selbstkritischem Nachdenken erhöht. Langfristig wird die Qualität des Bildungssystems für den Einzelnen und für die Gesellschaft daran gemessen, inwieweit es erfolgreich die verschiedenen Wissens- und Handlungskulturen, in denen die Menschen leben, zu integrieren vermag. Dies gilt insbesondere auch für den Zusammenhang des mathematischen Denkens mit allen Lebensbereichen. Daher wird der Mathematikunterricht der Zukunft in verstärktem Maße daran arbeiten müssen, differenziertere Einsichten in die gewachsene Rolle der Mathematik in Technik und Kultur zu vermitteln. Dazu wird die Geschichte der Mathematik einen Beitrag leisten, und zwar als Teil des Fachunterrichts.

Auf der anderen Seite ist es selbstverständlich, daß schon der große zeitliche Anteil des Mathematikunterrichts am Gesamtunterricht besondere Anforderungen an seine Qualität stellt. In keinem anderen Fach ist das Spannungsverhältnis zwischen der inneren Bedeutung der jeweiligen mathematischen Inhalte und ihrer vielfältigen Beziehungen zu anderen Gebieten so ausgeprägt. Das macht das Unterrichten reizvoll und schwierig zugleich. Der Unterricht sollte den Heranwachsenden authentische Erfahrungen mit Mathematik ermöglichen und dieses Spannungsverhältnis als Quelle positiver Einsichten erfahrbar machen. Allerdings kann und soll diese Authentizität nicht „geborgt” sein. Sie ist kein „Nacherleben” der Erfahrungen eines Forschers oder eines Anwenders, sondern es geht um eigene Erfahrungen jenseits von Spezialisierungen, die ein Verstehen von Mathematik und ihrer verschiedenen Ausprägungen ermöglichen sollen. Auch dabei können mathematikgeschichtliche Inhalte eine wichtige Rolle spielen. Mathematische Ideen, Begriffe und Techniken sind irgendwann einmal aus konkreten Fragen, die Menschen gestellt haben, entstanden, und wenn man zu dieser Entstehung zurückgeht, sollte sich ihre Bedeutung besser erschließen. Dahinter steht die Idee der *Partizipation*. In der Auseinandersetzung mit einem Quellentext, einer Aufgabe, einer Anwendung oder einer Schreibweise werden die Schülerinnen und Schüler in eine für sie zunächst fremde Welt hineingezogen, die sie sich nach und nach erschließen müssen. Der Pädagoge H. Roth benutzte dafür den Begriff der *originalen Begegnung* (Roth 1969).

Ein Trend zur Einbeziehung geschichtlicher Inhalte in den Mathematikunterricht ist absehbar. In Deutschland und außerhalb gibt es immer mehr Lehrer, Didaktiker und Mathematiker, die daran arbeiten. Lehrerprüfungsordnungen und Lehrpläne sehen in letzter Zeit verstärkt mathematikgeschichtliche Inhalte vor, Schulbücher stellen sich auf den Trend ein.

Geschichte der Mathematik kann beitragen

* zu Einsichten in die *Entwicklung mathematischer Begriffe;*
* zu einem vertieften Verständnis der *Rolle der Mathematik in unserer Welt* und ihre Beziehungen zu Anwendungen, Kultur und Philosophie; sowie
* zur Wahrnehmung und zum Verstehen der Ziele und Intentionen mathematischer Begriffsbildungen, der Möglichkeiten alternativer Wege und persönlicher Aspekte. Die Schüler erfahren so etwas über die *subjektive Seite* der Mathematik.

Wenn solche Aktivitäten zu einem vertieften Verständnis von Mathematik führen sollen, kann es allerdings nicht um das bloße Zur - Kenntnis - Nehmen von Tatsachen gehen. Vielmehr sollten wir beim Nachdenken einen Kreis durchlaufen und in einen Dialog mit dem historischen Gegenstand eintreten. Indem wir uns zunächst auf seine Andersartigkeit einlassen, werden wir schließlich dazu geführt, die historische Sicht mit unserer eigenen in Beziehung zu setzen und so unser aktuelles Verständnis zu vertiefen (Jahnke 1995).

Mathematikgeschichtliche Inhalte werfen sowohl in *inhaltlicher*, als auch in *methodischer* Hinsicht besondere Probleme auf. Aufgrund ihrer Ausbildung haben die meisten Lehrer ein geringes Überblickswissen über die Geschichte der Mathematik und (in der Regel) keine Erfahrung mit der Lektüre von historischen Quellen. Das muß zwangsläufig zu einer gewissen Unsicherheit führen.

Zum anderen dürfen auch die methodischen Probleme nicht unterschätzt werden. Geschichtliche Inhalte erfordern einen *besonderen Umgang mit Sprache*, der im Mathematikunterricht in der Regel nicht gepflegt wird. Außerdem muß man auch *neue Prioritäten* für seinen Unterricht setzen, um die Geschichte nicht nur als Anlaß zu nehmen, von dem aus sehr schnell in die 'eigentliche' Mathematik übergeleitet wird. Insgesamt wird der Mathematikunterricht der Zukunft mehr Reflexionsanteile enthalten müssen (vgl. Neubrand 1990).

Für den Unterricht kann man sich verschiedene Typen von historischen Gegenständen, Materialien und Aktivitäten vorstellen: das Studium einer vom heutigen Verständnis abweichenden Auffassung eines mathematischen Begriffs und Einsichten in seine Entwicklung; interessante Aufgaben aus historischen Lehrbüchern; Untersuchung historischer, heute vielleicht überholter Rechentechniken (dazu vgl. man die Neu-Editionen der Rechenbücher von Adam Riese (etwa Deschauer 1992); die Untersuchung interessanter Anwendungen der Mathematik in der Geschichte.

Die Entwicklung von Konzeptionen, wie mathematikgeschichtliche Inhalte in den Unterricht einbezogen werden können und welche Verständnisdimensionen dabei speziell angesprochen und gefördert werden, steht noch in den Anfängen. Daher arbeiten wir gegenwärtig an einem Projekt, bei dem die Entwicklung von Unterrichtsreihen, in denen historische Originaltexte studiert werden, und die empirische Erforschung ihrer Umsetzung im Unterricht Hand in Hand gehen. Es handelt sich dabei also um eine Form des Designs, die „Entwicklung und Erforschung inhaltsbezogener theoretischer Konzepte und praktische Unterrichtsbeispiele“ (Wittmann 1992, 56) miteinander kombiniert. Aus einer Vorstudie, die die Bearbeitung einer Quelle zur Vermessungslehre in einigen 9. Klassen Bielefelder Gymnasien zum Gegenstand hat, soll im folgenden berichtet werden, um Chancen und Schwierigkeiten eines solchen Unterrichts zu verdeutlichen.

Der Tunnel auf Samos

Bei Herodot, dem ältesten griechischen Historiker findet sich die Beschreibung eines Tunnels, der ungefähr 530 v. C. unter der Regierung des Tyrannen Polykrates auf der Insel Samos durch den Ingenieur Eupalinos gebaut worden ist. Die Kenntnis von einem solchen Tunnel war völlig verloren gegangen, bis man ihn am Ende des vorigen Jahrhunderts wiedergefunden hat (Fabricius 1884). Erste Grabungen mit primitiven Mitteln zeigten, daß Herodots Bericht genau zutraf. Zwischen 1971 und 1978 erfolgte dann eine vollständige Freilegung und genaue Untersuchung des Tunnels (Kienast 1986/87).

Der Tunnel diente der Wasserversorgung der Festung Samos und durchstach einen ganzen Gebirgszug. Er ist 1040 m lang, 2 m breit und 2 m hoch. und verfügt über einen Weg, auf dem er begangen werden kann, und einen daneben verlaufenden Kanal für das Wasser (Abb. 1). Sein Bau wurde von beiden Enden aus vorangetrieben, und beide Bautrupps haben sich im Berg getroffen.

Abb. 1: Inneres des Tunnels mit Weg und Wasserkanal, Kienast 1986/87, 183

Die darin liegende Ingenieurleistung ist um so höher zu bewerten, als damals bei vergleichbar langen Tunneln während des Baues mehrere Schächte zur Erdoberfläche angelegt wurden, um die Richtung der Grabung zu korrigieren. Seit dem Auffinden des Tunnels hat man sich daher gefragt, auf welche Weise die notwendigen Vermessungsarbeiten zur Fixierung der Richtung des Vortriebs von Eupalinos ausgeführt worden sind.

Eine mögliche Antwort besteht im Rückgriff auf eine Quelle, die ungefähr 600 Jahre jünger ist. In einem Handbuch, in dem die Gebrauchsweise eines Vermessungsinstrumentes, der sogenannten "Dioptra" (Abb. 2) dargestellt wird, behandelt Heron von Alexandria (vermutlich 40 bis 120 n. C.) die Aufgabe, "einen Berg in gerader Linie zu durchstechen, wenn die Mündungspunkte des Grabens an dem Berge gegeben sind" (vgl. Anhang). Diese Schrift stellt auch eine ganze Reihe weiterer Vermessungsprobleme, die man im Unterricht thematisieren könnte. In einem Vorwort beschreibt Heron den Nutzen der Dioptra. Neben Landvermessung und Astronomie verweist er auf militärische Anwendungen. Häufig seien Angriffe auf Festungen daran gescheitert, daß die Belagerer die Höhe der Mauern unterschätzt und mit zu kurzen Leitern angegriffen hätten. Hier sei die Dioptra nützlich, denn mit ihrer Hilfe könne man die fraglichen Größen "außer Schußweite" messen (Schöne 1903, 191).

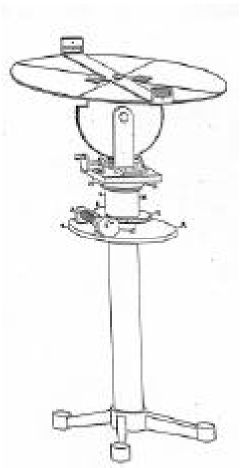

Abb. 2: Rekonstruktion der bei Heron beschriebenen Dioptra

Die Hypothese; Eupalinos sei im wesentlichen so vorgegangen, wie es bei Heron beschrieben wird, ist lange Zeit von den Experten favorisiert worden (vgl. van der Waerden 1956, 168 ff), und sie liegt dem im folgenden beschriebenen Unterricht zugrunde. Die Ausgrabungen der 70er Jahre haben allerdings die beteiligten Archäologen dazu geführt, eine andere Theorie vorzuziehen. Wir werden sehen, daß die Schüler von sich auf beide Theorien gekommen sind.

Konzeption einer Unterrichtsreihe

An diese Sachverhalte um den Tunnel auf Samos anknüpfend, haben wir eine Unterrichtsreihe konzipiert, die den Heron-Text des Anhangs zum Gegenstand hatte. Diese Reihe wurde von dem zweitgenannten Autor in drei 9. Klassen an Gymnasien der Region Bielefeld durchgeführt und von der erstgenannten Autorin beobachtet und auf Tonband aufgenommen. Die Reihe fand jeweils vor der Behandlung von Strahlensätzen und Ähnlichkeit als Hinführung zu diesen Themen statt.

Unsere Erwartung war, daß die Rahmengeschichte mit dem Tunnel für die Schülerinnen und Schüler attraktiv sein, der Quellentext aber vielleicht doch Schwierigkeiten machen würde. Dennoch wurde an der Quelle nichts geändert. Entgegen einigen Befürchtungen waren auch die griechischen Buchstaben unproblematisch. Den Schülerinnen und Schülern wurde gesagt, daß es sich hier um einen originalen Abschnitt eines antiken Handbuchs für Vermessungsingenieure handelt, der nicht speziell für sie verständlicher gemacht worden sei. Er sei nicht ganz leicht zu lesen, sie könnten die Schwierigkeiten aber bewältigen. Diese Bemerkung hat bei einer Reihe von Schülern äußerst motivierend gewirkt.

Mathematisch setzt das von Heron beschriebene Verfahren der Richtungsbestimmung den Ähnlichkeitsbegriff voraus. Wir vertrauten darauf, daß die Schülerinnen und Schüler ein intuitives Vorwissen haben, das ihnen ein gewisses Verständnis ermöglicht, und waren gespannt, wie sie dieses aktivieren würden.

Ein strukturierendes Element der Quelle ist die darin enthaltene Zeichnung. Der Text selbst kann als Nachkonstruktion dieser Zeichnung gelesen werden. Allerdings ist der kognitive Status der verschiedenen Linien unterschiedlich. Dies wird im Text (und in der Zeichnung durch unterschiedliche Linientypen) ausgedrückt, aber in einer für die Schüler nicht offensichtlichen Weise. Einerseits hat man den real vermessenen Streckenzug $BEZH$ u.s.w., zum zweiten das gedachte Dreieck $BN\Delta$, dessen Seite $B\Delta$ der Tunnel ist, und schließlich die real im Gelände konstruierten rechtwinkligen Dreiecke $BO\Xi$ und $\Delta P\Pi$, deren Hypotenusen in die zu grabende Richtung weisen. Die eigentliche Idee, wie die Richtung des Tunnels bestimmt wird, kommt erst am Ende des Textes heraus.

Diesem Spannungsverhältnis zwischen der zugrunde liegenden Idee und der sequenziellen Struktur des Textes haben wir dadurch Rechnung getragen, daß wir die Frage, wie man die Richtung des Tunnels bestimmen könnte, schon vor der Lektüre der Quelle im Unterricht besprochen haben. Dabei war es nicht das Ziel, zu einer vollständigen, ausgereiften Lösung zu gelangen, weil dadurch die Lektüre der Quelle entwertet worden wäre. Vielmehr sollten sich die Schülerinnen und Schüler bestmöglich auf das Problem einstellen und allgemeine Ideen zu seiner Lösung entwickeln.

Neben der konkreten Orientierung auf das Problem sollten die Schülerinnen und Schüler auch Gelegenheit haben, sich auf die Geschichte der Mathematik selbst einzustellen. Zu diesem Zweck wurde der Unterricht jeweils mit der Aufgabe eröffnet, eine „Landkarte" zur Geschichte der Mathematik anzufertigen. Dabei geht es darum, Namen von Mathematikern zu sammeln und diese zeitlich und sachlich einzuordnen. Im vorliegenden Fall hatte diese Unterrichtsphase auch die Funktion, daß der Autor als von außen Kommender mit den Schülerinnen und Schülern bekannt wurde.

Die resultierende Unterrichtsreihe bestand aus 3 + x Stunden:

1. Stunde: Landkarte zur Geschichte der Mathematik und Bericht über den Tunnel von Samos

2. Stunde: Besprechung und Bearbeitung des Problems, wie man durch Messungen die Richtung des Tunnels bestimmen kann;

3. Bearbeitung der Quelle: eine erste Lektüre war als Hausaufgabe aufgegeben;

weitere Stunden: Behandlung weiterer Vermessungsaufgaben: z. B: Ausführen und zeichnerisches Auswerten von Messungen mit einem heutigen Theodoliten.

Der Unterricht

Allen Klassen hat die Anfertigung einer Landkarte zur Geschichte der Mathematik großen Spaß gemacht. Auch das Vorwissen war, für Schüler und Lehrer überraschend, vielfältig. 30 Schüler sind eben doch klüger als ein einzelner. Natürlich kann man in einer 9. Klasse nicht so viele Kenntnisse erwarten wie in einer 11. (vgl. Jahnke 1995, 42/43), jedoch gibt es bei Schülern aller Altersstufen *historische Phantasie*, die unbedingt aktiviert werden sollte. Fragen nach Anlässen und Gründen für die Entwicklung von Zahlen/ Zahldarstellungen oder geometrischer Ideen hat sich jeder Heranwachsende schon einmal gestellt, und es wäre eine verschenkte Chance, wenn das nicht auch im Unterricht zur Sprache käme.

Strategien der Schüler

Die Diskussion darüber, wie man denn die Richtung des Tunnels durch Vermessung feststellen kann, wenn ein Ende nicht direkt vom anderen aus angepeilt werden kann, erwies sich als sehr ergiebig. Im wesentlichen wurden in allen Klassen dieselben beiden Ideen entwickelt, die auch von den Archäologen als Problemlösungen angeboten werden.

Die erste ist in der Quelle ausgeführt. Vom Tunneleingang zum Tunnelausgang wird ein Streckenzug um das Gebirge herum vermessen. Welche Eigenschaften dieser Streckenzug genau haben muß, wurde in keiner Klasse bis zu Ende durchdacht. Der Lehrende hat sich weitgehend zurückgehalten und seine Einwürfe auf die eines Moderators beschränkt. In einer Klasse begann man etwa mit der Zeichnung der Abb. 3.

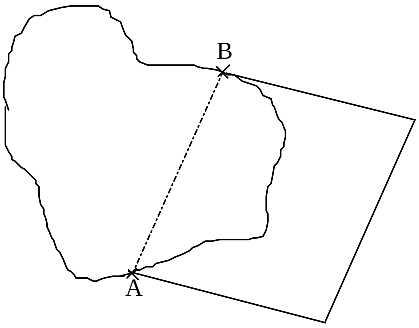

Abb. 3: Tafelzeichnung,

und der Idee: *Von B weit genug nach rechts gehen, möglichst gerade, dann von A auf einer parallelen Linie, gleich lang wie die erste, nach rechts gehen und die Verbindung der beiden Endpunkte nach AB verschieben, bzw. den Winkel verschieben.* Nun war nicht klar, wie man die Längen mißt (vielleicht durch Abschreiten), oder wie man es erreichen kann, daß die beiden Strecken parallel werden. Diese Fragen blieben offen, statt dessen wurde das Problem erörtert, was denn geschieht, wenn ein Hindernis (z.B. ein Hügel) im Wege ist. Das führte auf das Bild der Abb. 4

mit der Maßgabe *In paralleler Richtung über den Hügel gehen, dann von C aus zu den beiden Endpunkten peilen und die Längen (per Faden) der beiden Strecken messen. und dann die Länge der `eigentlichen´ Strecke DE berechnen.* Aber wie kann das geschehen? Nun, man peilt von C’ statt von C aus, so daß der Winkel bei D rechtwinklig wird. Dann ließe sich der Pythagoras anwenden. Den *haben wir schon gehabt.*

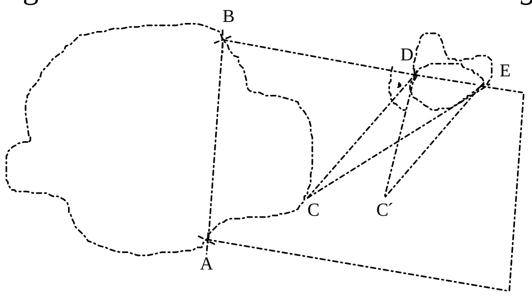

Abb. 4: Tafelzeichnung

Die Diskussion war wenig zielgerichtet und tastend. Aber sie hatte auf eine Idee sowie eine Reihe von Teilfragen und Schwierigkeiten geführt, die im Prinzip für die Schüler lösbar waren.

Die zweite mögliche Strategie, auf die die Schülerinnen und Schüler kamen, resultiert aus der Frage, ob man nicht vom Gipfel des Berges aus beide Endpunkte des geplanten Tunnels, die man durch Fahnen markiert hat, anpeilen kann. Wenn dies nicht direkt möglich ist, dann müßte man einen verbindenden Streckenzug ausstecken, so daß man von jeder Fahne aus die beiden Nachbarfahnen anpeilen kann. Es wurde diskutiert, aber im Unterricht nicht vollständig geklärt, ob und wie dieser Streckenzug schrittweise in eine Gerade überführt werden kann. Von den Archäologen wird es heute für wahrscheinlich gehalten, daß Eupalinos die Richtung des Tunnels durch Abstecken eines solchen Streckenzuges bestimmt hat.

Quellenlektüre

Am Schluß der Stunde wurde die Quelle verteilt, die als Hausaufgabe zu lesen war. Bereits vor Beginn der folgenden Unterrichtsstunde fanden in allen Klassen Diskussionen statt, in denen die Schüler sich über Herons Idee verständigten. Die Besprechung erfolgte in den einzelnen Klassen unterschiedlich. In der ersten wurde die Idee frei schrittweise an der Tafel entwickelt, in der zweiten wurde von einem besonders motivierten Schüler eine perfekte Interpretation der Quelle vorgetragen, in der dritten wurde der Text Satz für Satz durchgesprochen.

In einer Klasse wurde die Diskussion mit der Bemerkung eines Schülers eröffnet: „Heron hat einen Fehler gemacht!” In der Tat müßte es in der 12. Zeile unter der Abbildung strenggenommen KM statt KΛ heißen. Dazu bemerkte dann ein anderer Schüler, daß man dies nicht wirklich als Fehler bezeichnen könne, da Heron vielleicht nicht scharf zwischen Λ und M unterschieden hat. M ergibt sich aus der Feinjustierung des Punktes Λ. Die Schülerinnen und Schüler hatten die Quelle also weitgehend verstanden und waren zu differenzierten Argumentationen in der Lage.

Es war interessant zu sehen, wie die Schüler, ohne etwas von Strahlensätzen oder Ähnlichkeit zu wissen, Herons Verfahren begründeten. In einer Klasse argumentierten sie, daß sein Verfahren genau so funktioniert wie die Konstruktion des Steigungsverhältnisses einer Geraden mit Hilfe des Steigungsdreiecks. Da dies im Unterricht schon länger zurücklag, stellt diese Argumentation ihnen und dem Unterricht ein gutes Zeugnis aus. In den anderen Klassen wurde etwas vage, aber intuitiv ganz zutreffend damit argumentiert, daß das Verhältnis der Richtungsdreiecke zum großen Dreieck den Maßstab wie „bei einer Landkarte” darstellt.

Nach der Besprechung der Quelle wurde der Unterricht auf verschiedene Weisen fortgesetzt. In allen Klassen wurde auf den nicht ganz geradlinigen Verlauf des Tunnels hingewiesen. Die beiden Stollen haben sich um ungefähr 10 m verfehlt. Es wurde zeichnerisch bestimmt, daß der entsprechende Fehler bei der Messung des Richtungswinkels deutlich kleiner als 1° ist. In allen Klassen wurde auch die Frage aufgeworfen, wie Heron denn mit dem Höhenunterschied umgegangen ist.

In einer Klasse wurden Messungen mit einem heutigen Theodoliten durchgeführt, in einer anderen wurde auf dem Schulgelände Herons Messung real simuliert. Es zeigte sich dabei, daß die wirkliche Ausführung für einige Schüler hilfreich (und nötig) war, um das Verfahren vollständig zu verstehen.

Schriftliche Produktionen der Schüler

Allen Schülern wurde die Aufgabe gestellt, die Idee der Vermessung in eigenen Worten schriftlich darzustellen, in einer Klasse als Hausaufgabe, in den anderen während des Unterrichts. Aus den Ergebnissen ist ersichtlich, daß mehr als 2/3 der Schüler den Text vollständig verstanden hatten. Diejenigen, die ihn während des Unterrichts schreiben mußten, hatten weniger Zeit und waren daher gezwungen, knapper zu formulieren. Das führte dazu, daß sie sich sprachlich von der Quelle stärker lösen mußten als die anderen. Die meisten haben diese Anforderung sehr gut bewältigt und zum Teil prägnante abkürzende Formulierungen gefunden, die eine Mischung aus Alltagssprache und im Unterricht erlernter Fachsprache darstellen. Wir halten derartige sprachliche Übungen und die dabei erworbenen Qualifikationen für ein wichtiges allgemeines Ziel der Einbeziehung historischer Quellen in den Unterricht (zum Zusammenhang zwischen aktiver/rezeptiver Beschäftigung mit Texten und autonomem Lernen vgl. Walther 1981).

Geschichte als Anlaß zur Reflexion

Historische Beispiele bieten in unterschiedlicher Weise für die Schülerinnen und Schüler Anlässe zur Reflexion. Im vorliegenden Fall bot es sich an, über die Rolle der Mathematik bei der Konstruktion und Ausführung der großen Bauwerke der Antike zu sprechen. Natürlich war den Schülern auch vorher bewußt, daß keines dieser Bauwerke ohne mathematische Ideen und Techniken hätte erstellt werden können. Dennoch war es für sie eindrucksvoll, das Eingreifen der Mathematik und die daraus resultierende Arbeitsersparnis im Vergleich zu einem Tunnel, der nach dem Prinzip von Versuch und Irrtum gebaut wird, konkret nachzuvollziehen.

Literatur

Deschauer, S.: *Das zweite Rechenbuch von Adam Ries: eine moderne Textfassung mit Kommentar und metrologischem Anhang und einer Einführung in Leben und Werk des Rechenmeisters* . Braunschweig u. a.: Vieweg, 1992

Fabricius, E. Alterthümer auf der Insel Samos. Mitteilungen des Deutschen Archäologischen Institutes in Athen 9 (1884), 163 - 197

Jahnke, H. N. Historische Reflexion im Unterricht. Das erste Lehrbuch der Differentialrechnung (Bernoulli 1692) in einer elften Klasse. *mathematica didactica* 1995, *18*(2), 30-58

Kienast, H. J. Der Tunnel des Eupalinos auf Samos, *Mannheimer Forum* 1986/87, 179 - 241

Neubrand, M. Stoffvermittlung und Reflexion. *mathematica didactica*, 1990 (*13*), 21-48

Roth, H.: *Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens. 11. Aufl.* . Hannover u.a.: Schroedel, 1969

Schöne, H. (Hg u. Üb.) Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia. Vol. III: Rationes dimetiendi et commentatio dioptrica. Griechisch und Deutsch. Leipzig: B. G. Teubner, 1903, S. 238 ff)

van der Waerden, B. L. Erwachende Wissenschaft, Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. Aus dem Holländischen übersetzt v. H. Habicht . Basel : Birkhäuser: 1956

Walther, G. Autonomous Learning and the Reading of Mathematical Texts. *Journal für Mathematik-Didaktik* 1981 *(2)*, 147-177

Wittmann, E. C.. Mathematikdidaktik als „design science“. Journal für Mathematik-Didaktik 1992, *13*, 55 - 70