Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter

SS 2010

Übungen zu Algebra und Diskrete Mathematik I

Blatt 2

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Zahlen $8n + 3$ und $5n + 2$ relativ prim sind.

b) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) = a \cdot b$.

Aufgabe 6

a) Es seien a und b positive ganze Zahlen sowie $d = \mathrm{ggT}(a, b)$. Zeigen Sie: Es gibt genau dann $x, y \in \mathbb{Z}$, mit $ax + by = c$, wenn $d \mid c$.

b) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$, welche die Gleichung $6825x + 2331y = \mathrm{ggT}(2331, 6825)$ erfüllen.

Aufgabe 7

a) Berechnen Sie $\phi(19), \phi(20)$ und $\phi(437)$.

b) Zeigen Sie: Ist $n = p^m$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ und $m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\phi(n) \; = \; p^m - p^{m-1}.$$

c) Widerlegen Sie die Behauptung

$$\phi(ab) \; = \; \phi(a) \cdot \phi(b)$$

durch ein Gegenbeispiel. Unter welchen Voraussetzungen für a und b gilt diese Behauptung? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

Aufgabe 8

a) Zeigen Sie: Ist $2^n + 1$ eine Primzahl, so ist n eine Zweierpotenz.

(*Hinweis*: Für ungerades k gilt $x + 1 \mid x^k + 1$.)

b) Sei $a_n = 2^{2^n} + 1$. Beweisen Sie: Für $n \neq m$ ist $\mathrm{ggT}(a_n, a_m) = 1$.

(*Hinweis*: Zeigen Sie dafür zunächst, dass für $m < n$ gilt $a_m \mid a_n - 2$.)

Abgabe: Bis Montag, den 26.April 2010, 9:00 im Postkasten LE 4.Etage.