Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Elementare Zahlentheorie

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 13 28.01.22

Aufgabe 1 (Bézout trifft Gauß, 5 Punkte)**.**

(a) Bestimmen Sie den ggT von $23 + 17i$ und $11 - 3i$.
Hinweis: Überlegen Sie sich, wie Sie eine Variante des Euklidischen Algorithmus formulieren können. Beweisen Sie, dass der Algorithmus terminiert und korrekt ist.

(b) Gilt eine analoge Version des Lemma von Bézout auf für $\mathbb{Z}[i]$ anstelle von $\mathbb{Z}$?

Aufgabe 2 (Primfaktorzerlegung, 4 Punkte)**.**
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Ring $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gauß'schen Zahlen faktoriell ist. Daher können wir, wie in $\mathbb{Z}$, zu jedem Primelement $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ die Bewertung

$$v_\pi \colon \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$$

definieren, welche für jedes $x \in \mathbb{Z}[i], x \neq 0$, durch

$$v_\pi(x) \coloneqq \max\{v \in \mathbb{N}_0 : \pi^v \mid x\},$$

gegeben sei, d.h. als Anzahl der Primfaktoren in der Primfaktorzerlegung von x der Form π mal eine Einheit aus $\mathbb{Z}[i]$.

(a) Darauf basierend können wir $v_{1+i}(10)$ auf folgende zwei verschiedenen Weisen bestimmen:
  (i) In der Primfaktorzerlegung $10 = 2 \cdot 5 = (1+i)(1-i)(1+2i)(1-2i)$ kommt $1+i$ genau einmal vor, d.h. $v_{1+i}(10) = 1$.
  (ii) Aus $(1+i)^2 \mid 10$ und $(1+i)^3 \nmid 10$, folgt aber $v_{1+i}(10) = 2$.
Wo liegt der Fehler?

(b) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $7 + 74i \in \mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 3 (Primzahlen der Form $x^2 + 2y^2$, 6 Punkte)**.**
Analog zu den Gaußschen ganzen Zahlen definieren die folgende Menge

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \coloneqq \left\{a + \sqrt{-2}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{C},$$

welche mit der Addition und Multiplikation aus $\mathbb{C}$ zum Ring wird. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ist ein Euklidischer Ring mit Euklidischer Normfunktion

$$N \colon \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \to \mathbb{Z}, \quad z = a + \sqrt{-2}b \mapsto z \cdot \overline{z} = a^2 + 2b^2.$$

(b) Sei $\pi = a + \sqrt{-2}b$ ein Primelement in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Zeigen Sie, dass es (genau) eine Primzahl p gibt mit $p \mid \pi$ und es gilt $N(\pi) = p^2$ oder p.

(c) Sei p eine ungerade Primzahl. Zeigen sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
  (i) p ist kein Primelement von $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
  (ii) Es gibt ein Primelement π von $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ mit $N(\pi) = p$.
  (iii) $p = x^2 + 2y^2$ hat eine Lösung $x, y \in Z$.
  (iv) $p \equiv 1$ oder $3 \bmod 8$.
Zusatz: Finden Sie eine Charakterisierung wann eine natürliche Zahl n der Form $x^2 + 2y^2$ für $x, y \in \mathbb{Z}$ ist (analog zum Zwei-Quadrate Satz, Satz 15.18).

(d) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $p = x^2 + 2y^2$ gibt.
Tipp: Betrachten Sie $N^2 + 2$.

Aufgabe 4 (Diophantische Gleichungen, 5 Punkte)**.**
Finden Sie alle ganzzahligen Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ der Gleichung

$$Y^2 + 4 = X^3$$

mit $x, y \neq 0$.
Tipp: Rechnen Sie in $\mathbb{Z}[i]$.

Abgabe: Am kommenden Freitag, den **04.02.22**, bis um 12:00 digital auf OLAT.
