

Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I  
Übungsblatt 7

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya

Übungen: F. Göbler

---

**Übung 1** (Präsenz)

Sei  $R$  ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung  $\nu : K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ . Zeige:

- (a)  $x \in R$  ist invertierbar in  $R$  genau dann, wenn  $\nu(x) = 0$ .
- (b)  $R$  ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m} = \{x \in R \mid \nu(x) > 0\} \cup \{0\}$ .
- (c)  $R$  ist normal.
- (d)  $R$  ist ein Hauptidealring.
- (e)  $R$  ist noethersch.
- (f) Die einzigen echten Primideale in  $R$  sind  $0$  und  $\mathfrak{m}$ .

**Übung 2** (Abgabe)

Sei  $(R, \mathfrak{m})$  ein noetherscher lokaler Integritätsbereich der Dimension 1. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (a)  $R$  ist ein diskreter Bewertungsring.
- (b)  $R$  ist normal.
- (c)  $\mathfrak{m}$  ist ein Hauptideal.
- (d)  $(R, \mathfrak{m})$  ist ein regulärer lokaler Ring.

**Übung 3** (Abgabe)

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus affiner Varietäten und  $f^* : K(X) \rightarrow K(Y)$  die dazugehörige Abbildung der Koordinatenringe. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

- (a)  $f$  surjektiv genau dann, wenn  $f^*$  injektiv.
- (b)  $f$  injektiv genau dann, wenn  $f^*$  surjektiv.
- (c) Ist  $f : \mathbb{A}_K^1 \rightarrow \mathbb{A}_K^1$  ein Isomorphismus, so ist  $f$  affin linear.
- (d) Ist  $f : \mathbb{A}_K^2 \rightarrow \mathbb{A}_K^2$  ein Isomorphismus, so ist  $f$  affin linear.

**Übung 4** (Abgabe)

Welche der folgenden geringsten Räume sind isomorph über  $\mathbb{C}$ ?

- (a)  $\mathbb{A}^1 \setminus \{1\}$
- (b)  $V(x_1^2 + x_2^2) \subset \mathbb{A}^2$

(c)  $V(x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3) \setminus \{0\} \subset \mathbb{A}^3$

(d)  $V(x_1 x_2) \subset \mathbb{A}^2$

(e)  $V(x_2^2 - x_1^3 - x_1^2) \subset \mathbb{A}^2$

(f)  $V(x_1^2 - x_2^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$

**Übung 5** (Abgabe)

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $P \in X$  und sei  $A$  eine abelsche Gruppe. Definiere eine Garbe  $i_P(A)$  auf  $X$  folgendermaßen:  $i_P(A)(U) = A$ , falls  $P \in U$ ,  $0$  sonst. Zeige, dass der Halm dieser Garbe  $A$  ist für jeden Punkt  $Q \in \overline{\{P\}}$  und  $0$  sonst. Man nennt diese Garbe Wolkenkratzergarbe. Zeige weiterhin, dass  $i_P(A) = i_*(A)$ , wobei  $A$  die konstante Garbe  $A$  auf  $\overline{\{P\}}$  und  $i : \overline{\{P\}} \rightarrow X$  die Inklusion.