Aufgabe 1: Integrität

(a) Zeigen Sie, dass für ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} A$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

  (i) X ist als topologischer Raum nicht zusammenhängend (d. h. $X = U_1 \dot\cup U_2$ für zwei offene Mengen U_1 und U_2).

  (ii) A enthält zwei Elemente e_1, e_2 mit $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1e_2 = 0$ und $e_1 + e_2 = 1$ (sog. *orthogonale Idempotente*).

  (iii) Es ist $A = A_1 \oplus A_2$ für zwei Ringe A_1, A_2.

  [Hinweis: Möglicherweise fällt Ihnen (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) leichter, als direkt (iii) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen.]

(b) Sei X ein Schema. Die folgenden Bedingungen sind alle notwendig dafür, dass X integer ist. Welche davon sind auch hinreichend?

  (i) Alle lokalen Ringe $\mathscr{O}_{X,x}$ sind integer.

  (ii) Es gibt eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_i \operatorname{Spec} A_i$, sodass A_i ein Integritätsring ist.

  (iii) Für jede offene affine Überdeckung $X = \bigcup_i \operatorname{Spec} A_i$ gilt, dass A_i ein Integritätsring ist.

Aufgabe 2: Algebren von endlichem Typ

Zeigen Sie Lemma 8.13 aus der Vorlesung:

(a) Sind $A \to B \to C$ Ringhomomorphismen, sodass B eine A-Algebra von endlichem Typ ist und C eine B-Algebra von endlichem Typ, dann ist C eine A-Algebra von endlichem Typ.

(b) Ist A ein Ring und $g \in A$, so ist die Lokalisierung A_g eine A-Algebra von endlichem Typ. [Achtung: Dies gilt im allgemeinen nicht für Lokalisierungen nach beliebigen multiplikativen Mengen. Kennen Sie ein Gegenbeispiel?]

(c) Ist $A \twoheadrightarrow B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, so ist B eine A-Algebra von endlichem Typ.

Aufgabe 3: Quasi-kompakte Morphismen

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. f heißt quasi-kompakt, wenn Y eine offene affine Überdeckung $\{U_i\}$ besitzt, sodass $f^{-1}(U_i)$ quasi-kompakt ist für alle i.

(a) Zeigen Sie, dass f quasi-kompakt ist, wenn X und Y beide affin sind oder wenn X als topologischer Raum noethersch ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

  (i) f ist quasi-kompakt.

  (ii) Für jede offene quasi-kompakte Teilmenge $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V)$ quasi-kompakt.

  (iii) Für jede offene affine Teilmenge $V = \operatorname{Spec} B \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V)$ quasi-kompakt.

(c) Zeigen Sie: f ist von endlichem Typ genau dann, wenn f quasi-kompakt und lokal von endlichem Typ ist.

Abgabe der schriftlichen Ausarbeitungen am nächsten Dienstag (22. 4.) in der Übung!
Aufgabe 3 kann auch eine Woche später (29. 4.) abgegeben werden.

Die Übungen finden ab kommender Woche immer dienstags 14–16 Uhr c. t. in Raum 310 (Übung) statt.