J.W. Goethe Universität
R. Neininger

WS 2015/16
Blatt 8

Übungen zur Höheren Stochastik

Aufgabe 29. Sei $X = (X_n)_{n\geq 1}$ ein stochastischer Prozess mit Zustandraum E, einem separablen, vollständigen metrischen Raum. Bezeichne $\Xi_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$ die n-te empirische Verteilung sowie $\mathfrak{E}_n$ die σ-Algebra der unter Permutationen aus $\mathcal{S}_n$ invarianten Ereignisse bezüglich X. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{E}_n = \sigma(\Xi_n)$.

Hinweis: Man zeige und verwende, dass sich jede symmetrische Funktion $f : E^n \to \mathbb{R}$ schreiben lässt als $f(x) = g(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i})$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ mit passendem, von f abhängendem g.

Aufgabe 30. Sei X eine Zufallsvariable in $(0, \infty)$ mit positiver, stetiger Dichte f. Es bezeichne $F(t) := \mathbb{P}(X \leq t)$ die Verteilungsfunktion von X und

$$h(t) := \int_0^t \frac{f(s)}{1 - F(s)}\,ds, \quad t \in [0, \infty),$$

die *Hazardfunktion von* X. Zeigen Sie, dass $h(X)$ exponentialverteilt zum Parameter 1 ist. Seien ferner, für $t \geq 0$,

$$Z_t := \mathbf{1}_{\{X\leq t\}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_t := \sigma(Z_s \,|\, 0 \leq s \leq t).$$

Zeigen Sie, dass $(Z_t - h(X \wedge t))_{t\geq 0}$ ein càdlàg Martingal bezüglich $(\mathfrak{A}_t)_{t\geq 0}$ ist.

Aufgabe 31. Sei (X, Y) ein Paar reeller Zufallsvariable mit gemeinsamer Lebesgue-Dichte $f_{X,Y}$. Es sei f_Y die Lebesgue-Dichte von Y und $A = \{f_Y > 0\}$. Zeigen Sie, dass $K(y, \cdot\,) := \delta_0$ für $y \in \mathbb{R} \setminus A$ und

$$K(y, B) := \int_B \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}\,d\lambda(x) \quad \text{für } y \in A \text{ und } B \in \mathfrak{B}$$

eine reguläre bedingte Verteilung von X unter Y definiert.

Hinweis: Das Dirac-Maß δ_0 kann dabei durch jedes andere Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ersetzt werden.

Aufgabe 32. Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine austauschbare Folge mit $X_1 \in \{0, 1\}$ f.s. und $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$. Zeigen Sie, dass eine Zufallsvariable Y existiert, so dass für alle $n \geq 1$ und $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\mathbb{P}(S_n = k \,|\, Y) = \binom{n}{k} Y^k (1 - Y)^{n-k} \quad \text{fast sicher.}$$

Abgabe am Dienstag, den 12. Januar 2016, vor der Vorlesung.