Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2016

Übungsblatt 2 20. April 2016

Aufgabe 5. (Kongruenzklassen, 4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Bahnen der folgenden Operation der Gruppe $\mathbb{Z}$ auf der Menge $X = \mathbb{Z}$ (zufällig gleich!):

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times X &\to X \\ (a, x) &\mapsto an + x. \end{aligned}$$

Weisen Sie zunächst nach, daß es sich um eine Gruppenoperation handelt. Finden Sie eine gute Beschreibung des Bahnenraums.

Aufgabe 6. (Kommutierende Links- und Rechtsoperationen, 4 Punkte)

Seien G und H Gruppen und X eine Menge. Seien $G \times X \to X$ und $X \times H \to X$ eine Linksoperation von G und eine Rechtsoperation von H auf der Menge X, so daß für alle $g \in G$, $x \in X$ und $h \in H$ gilt:

$$g.(x.h) = (g.x).h$$

(man sagt, die Operationen kommutieren).

Wir nehmen weiter an, daß die Operation von H frei und transitiv ist. Außerdem wählen wir ein Element $x_0 \in X$ aus. Zeigen Sie, daß durch

$$\varphi(g) = h \quad \Longleftrightarrow \quad g.x_0 = x_0.h$$

einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \to H$$

definiert wird. Wie hängt φ von der Wahl von x_0 ab?

Aufgabe 7. (Untergruppen von endlichem Index, 4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und seien $U_1, \ldots, U_n$ Untergruppen von endlichem Index

$$(G : U_i) < \infty.$$

Zeigen Sie, daß dann auch $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ eine Untergruppe von endlichem Index ist. Genauer:

$$(G : U) \leq \prod_{i=1}^n (G : U_i).$$

Anleitung: Lassen Sie G auf $X = \prod_{i=1}^n G/U_i$ durch

$$g.(x_1U_1, \ldots, x_nU_n) = (gx_1U_1, \ldots, gx_nU_n)$$

operieren. Wählen Sie ein geeignetes Element in X und verwenden Sie die Formel für den Index des Stabilisators.

Aufgabe 8. (Volle Ikosaedergruppe, 4 Punkte)

Sei I die Automorphismengruppe eines Ikosaeders. Diese operiert auf den folgenden Mengen:

(i) die Ecken des Ikosaeders,

(ii) die Kanten des Ikosaeders,

(iii) die Seitenflächen des Ikosaeders.

Beschreiben Sie jeweils die Bahnen.

(a) Bestimmen Sie den Stabilisator I_Δ einer Seitenfläche Δ. Dieser Stabilisator liefert Automorphismen des Dreiecks Δ und damit einen Gruppenhomomorphismus

$$I_\Delta \to D_3$$

zur Diedergruppe D_3, von dem Sie zeigen sollen, daß es sich um einen Isomorphismus handelt.

(b) Berechnen Sie nun die Ordnung von I sowie die Ordnung der anderen Stabilisatoren.

(c) Bonus: zeigen Sie, daß der Stabilisator einer Ecke isomorph zur Diedergruppe D_5 ist.

Tipp: Betrachten Sie Drehungen durch Achsen, die durch gegenüberliegende Eckpunkte (bzw. Kantenmitten, bzw. Seitenmitten) führen, sowie die Spiegelung an einer Ebene die Senkrecht auf einer Kante liegt.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **27. April 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60046116/16_SS_GdA`
