Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2017

Übungsblatt 6 12. Juni 2017

Aufgabe 21. (4 Punkte)

Sei X eine Menge und $R := \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R})$ der Ring der Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ mit punktweiser Addition und Multiplikation:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$
$$(fg)(x) := f(x)g(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

(b) Sei $S \subseteq R$ die Teilmenge der beschränkten Funktionen, d. h. f liegt in S, wenn $C \geq 0$ existiert, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass S ein Unterring von R ist.

(c) Beschreiben Sie die Einheitengruppen $R^\times$ und $S^\times$.

(d) Sei $I \subseteq R$ die Teilmenge der Funktionen, so dass $f(x) = 0$ für alle bis auf endlich viele $x \in X$ gilt. Zeigen Sie, dass I ein Ideal in R ist. Für welche X ist I sogar ein Unterring?

Aufgabe 22. (4 Punkte)

Sei X eine Menge und R ein kommutativer Ring mit Eins. Sei $V \subseteq X$ eine Teilmenge und $I(V) \subseteq \mathrm{Abb}(X, R)$ die Menge aller $f : X \to R$, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \in V$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $I(V)$ ein Ideal in $\mathrm{Abb}(X, R)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Einschränkungsabbildung $\mathrm{Abb}(X, R) \to \mathrm{Abb}(V, R)$, $f \mapsto f|_V$, surjektiv ist.

(c) Leiten Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes für Ringe einen Isomorphismus

$$\mathrm{Abb}(X, R)/I(V) \cong \mathrm{Abb}(V, R)$$

her.

Aufgabe 23. (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es für jeden Ring R genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ gibt.

(b) Gibt es einen Ring T, so dass es für jeden Ring R genau einen Ringhomomorphismus $R \to T$ gibt?

(c) Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen $f : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

(d) Sei K ein Körper und R ein Ring, der nicht der Nullring ist. Zeigen Sie, dass jeder Ringhomomorphismus $f : K \to R$ injektiv ist.

— **bitte wenden** —

Aufgabe 24. (4 Punkte)

Seien R und S Ringe.

(a) Zeigen Sie, dass $R \times S$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ein Ring ist.

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Projektionsabbildungen

$$p : R \times S \to R, \quad p(r, s) = r,$$
$$q : R \times S \to S, \quad q(r, s) = s,$$

Ringhomomorphismen sind.

(c) Ist die Inklusionsabbildung $i : R \to R \times S$, $i(r) = (r, 0)$, ein Ringhomomorphismus?

(d) Zeigen Sie: Ist T ein weiterer Ring und sind $f : T \to R$, $g : T \to S$ Ringhomomorphismen, dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $\varphi : T \to R \times S$ mit $p \circ \varphi = f$ und $q \circ \varphi = g$.

Abgabe: Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, stattdessen wird ein Lösungsvorschlag auf der Vorlesungswebseite veröffentlicht.

Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/65116210/17_SS_GdA`
