Statistik I im Sommersemester 2006

Themen am 6.6.2006:

Wahrscheinlichkeitstheorie und Inferenzstatistik

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Mittelwerten
- Schätzer, Schätzungen und Eigenschaften von Schätzern
- Punkt- und Intervallschätzung
- Schätzung von Anteilen, Mittelwerten und Varianzen

Lernziele:

1. Erwartungstreue, Konsistenz und Effizienz als erwünschte Schätzereigenschaften
2. Die Bedeutung von Standardfehlern bei der Schätzung von Populationsparametern
3. Interpretation von Konfidenzintervallen und Irrtumswahrscheinlichkeiten
4. Anwendung der T-Verteilung

Wiederholung

Frequentistischen Definition der Wahrscheinlichkeit: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_A}{n}\right)=\Pr(A)$

Gesetz der großen Zahl: $\lim_{n\to\infty}\left(\Pr\left(\left|\frac{n_A}{n}-\Pr(A)\right|<\varepsilon\right)\right)=1$

Einfache Zufallsauswahlen, geschichtete Zufallsauswahlen, mehrstufige Zufallsauswahlen

Wahrscheinlichkeitsverteilung von Häufigkeiten bei einfache Zufallsauswahlen ohne Zurücklegen: Die hypergeometrische Verteilung

$$\Pr(X=n_1)=h(X=n_1;n,N,N_1)=\frac{\binom{N_1}{n_1}\cdot\binom{N-N_1}{N-n_1}}{\binom{N}{n}}=\frac{\frac{N_1!}{n_1!\cdot(N_1-n_1)!}\cdot\frac{(N_0)!}{(n_0)!\cdot(N_0-n_0)!}}{\frac{N!}{n!\cdot(N-n)!}}$$

$$\mu(n_1)=n\cdot\frac{N_1}{N}\text{ und }\sigma^2(n_1)=n\cdot\frac{N_1}{N}\cdot\left(1-\frac{N_1}{N}\right)$$

Wiederholung

Wahrscheinlichkeitsverteilung von Häufigkeiten bei einfache Zufallsauswahlen mit Zurücklegen: Binomialverteilung

$$\Pr(X = n_1) = b\left(X; n, \pi_1\right) = \binom{n}{n_1} \cdot \pi_1^{n_1} \cdot \left(1-\pi_1\right)^{n-n_1} = \frac{n!}{(n-n_1)! \cdot n!} \cdot \pi_1^{n_1} \cdot \left(1-\pi_1\right)^{n-n_1}$$

$$\mu_X = n \cdot \pi_1 \text{ und } \sigma_X^2 = n \cdot \pi_1 \cdot \left(1-\pi_1\right)$$

Annäherung der hypergeometrischen Verteilung an die Normalverteilung hinreichend genau, wenn N/n > 20.

Der ***zentrale Grenzwertsatz***:

Die Summe unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen nähert sich bei steigender Zahl von Summanden asymptotisch einer Normalverteilung an:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\Pr \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu_X}{\sqrt{n \cdot \sigma_X^2}} \right) \right) = N\left(0;1\right)$$

Wiederholung

Quantile der Standardnormalverteilung

α	z_α
0.000	-∞
0.005	-2.57
0.010	-2.326
0.015	-2.170
0.020	-2.054
0.025	-1.960
...	...
0.050	-1.645
...	...
0.100	-1.282
...	...

α	z_α
0.200	-0.842
...	...
0.250	-0.674
...	...
0.300	-0.524
...	...
0.400	-0.253
...	...
0.500	0.000
...	...
0.600	0.253

α	z_α
...	...
0.700	0.524
...	...
0.750	0.674
...	...
0.800	0.842
...	...
0.900	1.282
...	...
0.995	2.576
1.00	∞

Aus den abgebildeten Ausschnitten einer Tabelle mit Z-Werten lässt sich so etwa ablesen,

- dass das 1%-Quantil der Standardnormalverteilung $Q_{0.01;N(0;1)} = -2.326$ ist
- dass das 5%-Quantil $Q_{0.05;N(0;1)} = -1.645$ beträgt.

Umgekehrt lässt sich der Tabelle entnehmen,

- dass der Wert –1.96 das 2.5%-Quantil ist, $\Phi(-1.96) = 0.025$
- und der Wert +1.282 das 90%-Quantil, $\Phi(1.282) = 0.90$.

$$Q_{\alpha;N(\mu,\sigma)} = Q_{\alpha;N(0,1)} \cdot \sigma + \mu \quad \text{bzw.} \quad Q_{\alpha;N(0,1)} = \frac{Q_{\alpha;N(\mu,\sigma)} - \mu}{\sigma}$$

$$\alpha = \Phi\left(Q_{\alpha,N(0;1)}\right) = \Phi\left(z\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)$$

Stichprobenverteilungen von Mittelwerten

Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass Summen unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit steigender Zahl der Summanden asymptotisch normalverteilt sind.
Dies gilt unabhängig von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausgangsvariablen.
Vorausgesetzt wird allerdings, dass die ersten Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Ausgangsvariablen existieren, d.h. berechenbare reelle Zahlen sind.
Diese Bedingung ist in der Regel erfüllt.

Jeder Stichprobenmittelwert kann als Summe gleichartiger Summanden dargestellt werden:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

In Zufallsauswahlen können die Summanden als identisch verteilte Zufallsvariablen aufgefasst werden.
Bei einfachen Zufallsauswahlen mit Zurücklegen sind diese Variablen zudem statistisch unabhängig voneinander.
Also sind Stichprobenmittelwerte bei einfachen Zufallsauswahlen mit Zurücklegen unabhängig von der Verteilung der interessierenden Größe in der Population asymptotisch normalverteilt.

Stichprobenverteilungen von Mittelwerten

Aus den Regeln für Linearkombinationen von Zufallsavariablen folgt dann, dass der Erwartungswert und die Varianz der Kennwerteverteilung eine Funktion des Populationsmittelwerts, der Populationsvarianz und der Stichprobengröße n sind.

Erwartungswert und Varianz der Kennwerteverteilung von Stichprobenmittelwerten sind daher bei einfachen Zufallsauswahlen mit Zurücklegen:

$$\mu\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu\left(X_i\right) = \mu\left(X\right) = \mu_X$$

$$\sigma^2\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\left(X_i\right) = \frac{\sigma^2\left(X\right)}{n} = \frac{1}{n}\cdot\sigma_X^2$$

Stichprobenverteilungen von Mittelwerten

Die Realisierungen einfacher Zufallsauswahlen ohne Zurücklegen sind nicht statistisch unabhängig voneinander.
Die Abhängigkeit kann jedoch ausgeglichen werden, wobei der Ausgleichsfaktor gerade dem Unterschied der Varianz einer Biomialverteilung und einer hypergeometrischen Verteilung entspricht.
Bei einfachen Zufallsauswahlen ohne Zurücklegen gilt daher für Erwartungswert und Varianz der Kennwerteverteilung von Stichprobenmittelwerten:

$$\mu\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu\left(X_i\right) = \mu\left(X\right) = \mu_X$$

$$\sigma^2\left(\bar{X}\right) = \frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\left(X_i\right) = \frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2\left(X\right)}{n} = \frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sigma_X^2$$

In beiden Situationen sind die Kennwerteverteilungen asymptotisch normalverteilt.

Stichprobenverteilungen von Mittelwerten

Als Kennwerteverteilung für Stichprobenmittelwerte kann also die Normalverteilung herangezogen werden.

Zu beachten ist allerdings, dass die Normalverteilung in der Regel nur asymptotisch gilt, d.h. bei hinreichend großen Stichproben. Als Faustregel hat die Erfahrung gezeigt, dass die Normalverteilung als Kennwerteverteilung von Stichprobenmittelwerten bereits bei einer Fallzahl ab etwa 30 Fällen hinreichend genau ist:

$$\mathbf{n \geq 30}.$$

Bei anderen Verteilungen kommt es auf die Zahl der Ausprägungen und die Verteilungsform an, ab welcher Fallzahl eine hinreichend genaue Annäherung an die Normalverteilung vorliegt. Bei diskreten Verteilingen mit wenigen Ausprägungen und bei schiefen Verteilungen ist die Annäherung langsamer als bei symmetrischen und unimodalen Verteilungen mit vielen Ausprägungen.

Exakt und unabhängig von der Stichprobengröße sind Stichprobenmittelwerte über verschiedene Stichproben hinweg normalverteilt, wenn die interessierende Größe in der Population normalverteilt ist.
Stichprobenmittelwerte sind dann Linearkombinationen von Normalverteilungen, die daher normalverteilt sein müssen.

Normalverteilung von Anteilen und Häufigkeiten

Die Binomialverteilung mit den Parametern b(X; n, π_1) kann als Summe von n unabhängigen Bernoulli-Verteilungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit π_1 aufgefasst werden.
Nach dem zentralen Grenzwertsatz muss sich daher die Binomialverteilung asymptotisch einer Normalverteilung annähern.
Dies gilt tatsächlich. Die Annäherung ist hinreichend genau, wenn gilt:

$$n \cdot \frac{\pi_i}{1-\pi_i} > 9 \quad \text{und} \quad n \cdot \frac{1-\pi_i}{\pi_i} > 9$$

Ist diese Bedingung erfüllt kann anstelle der Binomialverteilung bzw. der hypergeometrischen Verteilung auch eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert $\mu_X = n \cdot \pi_1$ und Varianz $\sigma^2_X = n \cdot \pi_1 \cdot (1-\pi_1)$ bei Zufallsauswahlen mit Zurücklegen bzw. $\sigma^2_X = (N-n)/(n-1) \cdot n \cdot \pi_1 \cdot (1-\pi_1)$ bei Zufallsauswahlen ohne Zurücklegen verwendet werden.

Normalverteilung von Anteilen und Häufigkeiten

Die hypergeometrische und die Binomialverteilung sind diskret, die Normalverteilung dagegen stetig.
Um dies zu berücksichtigen, wird bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten jeweils 0.5 abgezogen bzw. addiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Fallzahl von n die Anzahl n_1 der Fälle mit der Ausprägung 1 im Intervall von a bis b liegt, ist bei einfachen Zufallsauswahlen mit Zurücklegen:

$$P(a \le n_1 \le b) = \sum_{n_1=a}^{n_1=b} \binom{n}{n_1} \cdot \pi_1^{n_1} \cdot (1-\pi_1)^{n-n_1} \approx \Phi\left(\frac{b+0.5-(n\cdot\pi_1)}{\sqrt{n\cdot\pi_1\cdot(1-\pi_1)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-0.5-(n\cdot\pi_1)}{\sqrt{n\cdot\pi_1\cdot(1-\pi_1)}}\right)$$

Bei Zufallsauswahlen ohne Zurücklegen und kleinen Populationen wird die hypergeometrische Verteilung an die Normalverteilung angenähert:

$$P(a \le n_1 \le b) = \sum_{n_1=a}^{n_1=b} \frac{\binom{N_1}{n_1} \cdot \binom{N-N_1}{n-n_1}}{\binom{N}{n}} \approx \Phi\left(\frac{b+0.5-(n\cdot\pi_1)}{\sqrt{n\cdot\pi_1\cdot(1-\pi_1)\cdot\frac{N-n}{N-1}}}\right) - \Phi\left(\frac{a-0.5-(n\cdot\pi_1)}{\sqrt{n\cdot\pi_1\cdot(1-\pi_1)\cdot\frac{N-n}{N-1}}}\right)$$

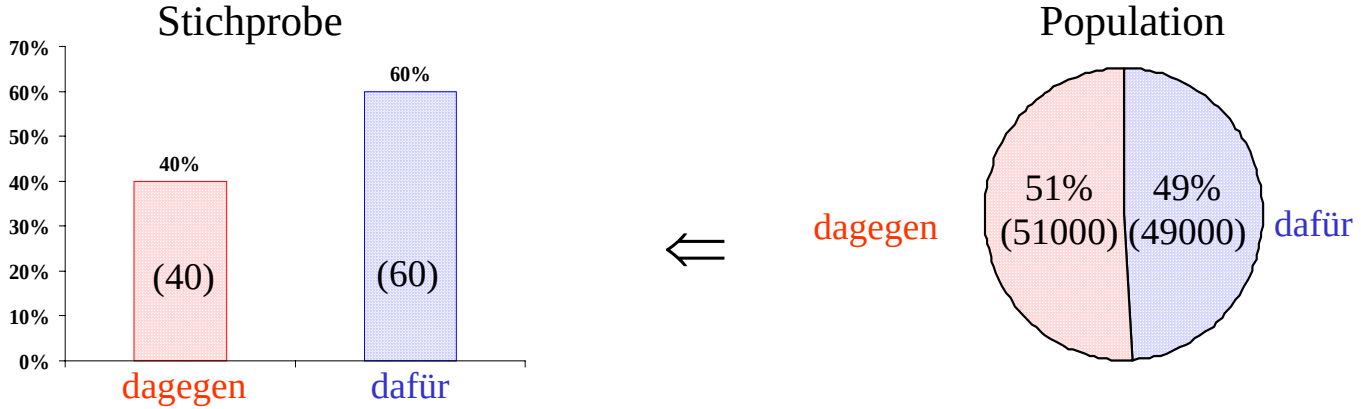
Normalverteilung von Anteilen und Häufigkeiten

Bei der asymptotischen Berechnung der Kennwerteverteilung von Anteilen wird in der Regel auf die Stetigkeitskorrektur ±0.5/n verzichtet.
Die asymptotische Kennwerteverteilung ist dann:

$$f\left(p_1\right) \approx N\left(\pi_1; \frac{\pi_1 \cdot \left(1-\pi_1\right)}{n}\right) \qquad \text{mit Zurücklegen}$$

$$\approx N\left(\pi_1; \frac{\pi_1 \cdot \left(1-\pi_1\right)}{n} \cdot \frac{N-n}{n-1}\right) \qquad \text{ohne Zurücklegen}$$

Schätzen von Anteilen, Mittelwerten und Varianzen



Eine der wichtigsten Anwendungen der Statistik in den Sozialwissenschaften besteht darin, anhand von Stichprobendaten Aussagen über eine Grundgesamtheit (Population) treffen zu können.

Es interessiert z.B. der Anteil π_1 der jenigen Personen in einer Stadt, die für die Einrichtung einer Ganztagsschule sind.

In einer einfachen Zufallsauswahl von n=100 Personen sind p_1=60% für die Einrichtung.

Es liegt nahe, den Stichprobenanteil p_1 als Schätzung des unbekannten Populationsanteils π_1 zu verwenden.

Da aber von einer Teilmenge (der Stichprobe) auf eine umfassendere Allgemeinheit (die Population) geschlossen wird, handelt es sich bei der Schätzung um einen Induktionsschluss der prinzipiell unsicher ist und fehlerhaft sein kann.

So ist es im Beispiel denkbar, dass in der Grundgesamtheit nicht eine Mehrheit von 60%, sondern nur eine Minderheit von 49% für die Einrichtung der Ganztagsschule ist.

Schätzer und Schätzung

Für eine einzelne Schätzung lässt sich grundsäzlich nicht angeben,
ob ihr Wert mit dem zuschätzenden Populationswert übereinstimmt oder ob sie sehr vom gesuchten Wert abweicht.

Bei Zufallsauswahlen ist jede Schätzung ein Zufallsexperiment und jede Schätzung ein mögliches Ereignis dieses Zufallsexperiments.
Eine Schätzung kann dann als Realisierung einer Zufallsvariable aufgefasst werden.
Zufallsvariablen, die für Schätzungen verwendet werden, heißen ***Schätzer***.
Eine ***Schätzung*** ist also eine von vielen möglichen Realisierungen eines Schätzers.

Die Kennwerteverteilung des Schätzers, d.h. die Wahrscheinlichkeits(dichte)verteilung der Zufallsvariable erlaubt Aussagen darüber,
wie wahrscheinlich Schätzungen sind, die nahe beim zu schätzenden Populationswert liegen.

Die Statistik versucht Schätzer zu finden, die möglichst gute Eigenschaften aufweisen.

Eigenschaften von Schätzern

Erwartungstreue oder ***Unverzerrtheit***

Ein Schätzer ist **unverzerrt** oder ***erwartungstreu*** (engl. *unbiased*), wenn der Erwartungswert der Kennwerteverteilung des Schätzers mit dem zu schätzenden Populationswert übereinstimmt;

$$\mu\left(\hat{\theta}\right) = \theta$$

In der Statistik wird das griechische kleine Theta („θ“) oft als allgemeinses Symbol für einen Parameter verwendet.
Ein kleines Dach („^“) über dem Symbol kennzeichnet dann einen Schätzer oder eine Schätzung.

> *Bei einfachen Zufallsauswahlen lässt sich die Kennwerteverteilung des Stichproben-anteils aus der Binomialverteilung oderder hypergeometrischen Verteilung berechnen.*
> *In beiden Fällen ist der Erwartungswert der Kennwerteverteilung genau der Anteil $\pi_1 = N_1/N$ der Elemente in der Population, die die betrachtete Eigenschaft aufweisen.*
> *Der Stichprobenanteil ist daher bei einfachen Zufallsauswahlen ein erwartungstreuer Schätzer.*

Eigenschaften von Schätzern

Konsistenz

Ein Schätzer ist ***konsistent***, wenn bei steigender Stichprobenfallzahl die Wahrscheinlichkeit gegen eins geht, dass der Abstand zwischen dem zu schätzenden Parameter und dem Stichprobenkennwert gegen null geht.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\Pr\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right|=0\right)\right)=1$$

Aus dem Gesetz der großen Zahl folgt, dass die Wahrscheinlichkeit einer beliebig kleinen Abweichung zwischen Stichprobenanteil und Populationsanteil bei einfachen Zufallsauswahlen gegen eins geht, wenn die Fallzahl über alle Grenzen wächst.
Der Stichprobenanteil ist daher bei einfachen Zufallsauswahlen mit Zurücklegen ein konsistenter Schätzer des Populationsanteils.
Bei einfachen Zufallsauswahlen ohne Zurücklegen ist der Anteil der ausgewählten Fälle ebenfalls gleich dem Populationsanteil, wenn im Extremfall alle Fälle ausgewählt werden.

Eigenschaften von Schätzern

Effizienz

Die Realisationen der Kennwerteverteilung sollen möglichst gering um den zu schätzenden Populationsparameter streuen. Ein Kennwert ist ***effizient***, wenn es keinen anderen Schätzer gibt, der mit einer geringeren Streuung um den zu schätzenden Parameter streut.

Als Maß für die Effizienz wird üblicherweise der Erwartungswert der quadrierten Abstände vom zu schätzenden Parameterwert herangezogen, der nach der englischen Bezeichnung *mean squared error* (MSE) heißt:

$$\mathrm{MSE} = \mu\left(\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right) = \sigma^2\left(\hat{\theta}\right) + \left(\mu\left(\hat{\theta}\right) - \theta\right)^2$$

Die Gleichung zeigt, dass MSE auch als Summe der Varianz der Kennwerteverteilung eines Schätzers plus der quadrierten Verzerrung (engl. *bias*), das ist der quadrierte Abstand zwischen dem Erwartungswert des Schätzers und dem zu schätzendem Parameter dargestellt werden kann.

> *Zur Schätzung des Populationsmittelwertes kann bei einer symmetrischen, unimodalen Verteilung sowohl der Stichprobenmittelwert als auch der Stichprobenmedian herangezogen werden.*
> *Effizienter ist die Kenngröße, deren Kennwerteverteilung mit einer geringeren Streuung um den Populationsmittelwert variiert. Welche das ist, hängt von Verteilung ab.*
> *Bei einfachen Zufallsstichproben aus normalverteilten Populationen ist der Stichprobenmittelwert ein effizienterer Schätzer des Erwartungswert als der Stichprobenmedian.*

Standardfehler

Bei unverzerrten Schätzern ist die quadrierte Verzerrung definitionsgemäß null, so dass die Effizienz in diesem Fall über die Varinanz der Kennwerteverteilung gemessen werden kann. Anstelle der Varinanz wird meist die Standardabweichung einer Kennwerteverteilung als Streuungsmaß verwendet.
Die Standardabweichung eines Schätzers wird als ***Standardschätzfehler*** oder ***Standardfehler*** bezeichnet.

> *Da bei einfachen Zufallsauswahlen ohne Zurücklegen der Stichprobenanteil ein unverzerrter Schätzer des Populationsanteils ist, ist der Standardfehler die Quadratwurzel aus dem MSE.*
> *Sie ist au der Standardabweichung der hypergeometrischen Verteilung berechenbar:*

$$\sigma(p_1) = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{N_1}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{N_1}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}}$$

Üblicherweise wird neben der Schätzung eines Populationsparameters auch der Standardfehler der Kennwerteverteilung aus den Stichprobendaten geschätzt.

Punktschätzung und Intervallschätzung

Von ***Punktschätzung*** spricht man, wenn die Realisation eines Schätzers als konkrete Schätzung des unbekannten Wertes eines Populationsparameters verwendet wird.

Es ist allerdings sehr unwahrscheinlich, dass eine einzelne Schätzung exakt mit dem unbekannten Populationsparameter übereinstimmt.

So ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stichprobenanteil p_1=0.6 (=60/100) bei einer Population von N=100000 und einer Stichprobengröße von n=100 einem Populationsanteil π_1=0.60 entspricht nur etwa 8%:

$$\Pr(p_1 = 0.6) \approx \Phi\left(\frac{60 + 0.5 - 0.6 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot \frac{100000 - 100}{100000 - 1}}}\right) - \Phi\left(\frac{60 - 0.5 - 0.6 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot \frac{100000 - 100}{100000 - 1}}}\right)$$

$$= \Phi(0.102) - \Phi(-0.102) \approx 0.08$$

In 92% aller Stichproben ist also mit Abweichungen zu rechnen.

Da der gesuchte Wert vermutlich nur in der Nähe der Schätzung liegt, ist es oft sinnvoller, statt eines exakten Wertes ein Intervall anzugeben, in dem der gesuchte Wert vermutlich liegt. Statt von Punktschätzung spricht man dann von ***Intervallschätzung***.

Vorgehensweise bei Intervallschätzung

Mit Hilfe der Kennwerteverteilung eines Schätzers können Intervallschätzungen berechnet werden. Dies kann am Beispiel der Schätzung eines Stichprobenmittelwerts verdeutlicht werden.

Bei einer einfachen Zufallsauswahl aus einer normalverteilten Population ist der Stichprobenmittelwert um den zu schätzenden Populationsmittelwert normalverteilt:

$$f\left(\bar{X}\right) = N\left(\mu_X; \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$$

Aus der asymptotischen Normalverteilung lässt sich ein Intervall berechnen, in dem der Stichprobenmittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von z.B. 90% liegt:

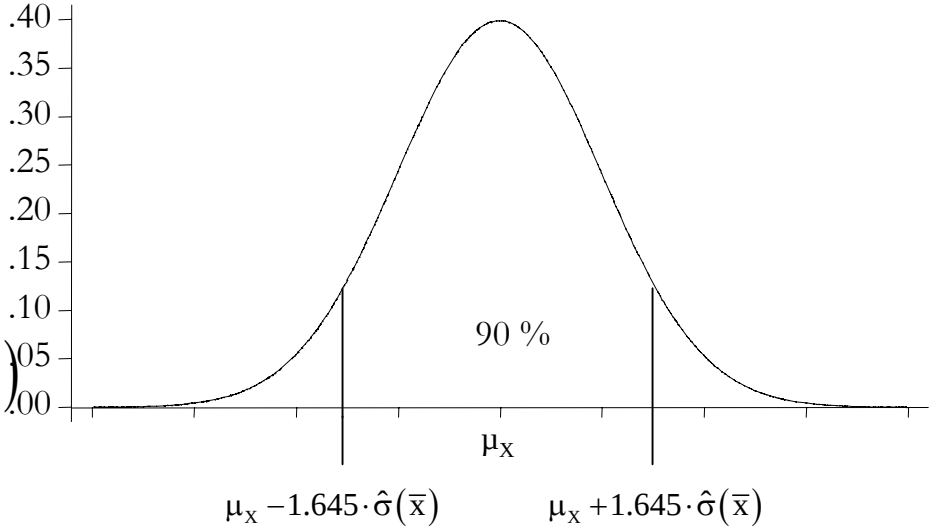
$$\begin{aligned}
0.9 &= 0.95 - 0.05 = \Phi(1.645) - \Phi(-1.645) \\
&= \Pr(-1.645 \le Z \le 1.645) \\
&= \Pr\left(-1.645 \le \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sigma\left(\bar{X}\right)} \le 1.645\right) \\
&= \Pr\left(-1.645 \cdot \sigma\left(\bar{X}\right) \le \bar{X} - \mu_X \le 1.645 \cdot \hat{\sigma}\left(\bar{X}\right)\right) \\
&= \Pr\left(\mu_X - 1.645 \cdot \sigma\left(\bar{X}\right) \le \bar{X} \le \mu_X + 1.645 \cdot \sigma\left(\bar{X}\right)\right) \\
&= \Pr\left(\mu_X - 1.645 \cdot \frac{\sigma_X^2}{n} \le \bar{X} \le \mu_X + 1.645 \cdot \frac{\sigma_X^2}{n}\right)
\end{aligned}$$

90% aller Realisationen liegen zwischen dem 95%-Quantil und dem 5%-Quantil der Standardnormalverteilung

Durch Z-Transformation werden die Quantilgrenzen bei einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ_X und Varianz σ^2_X/n berechnet.

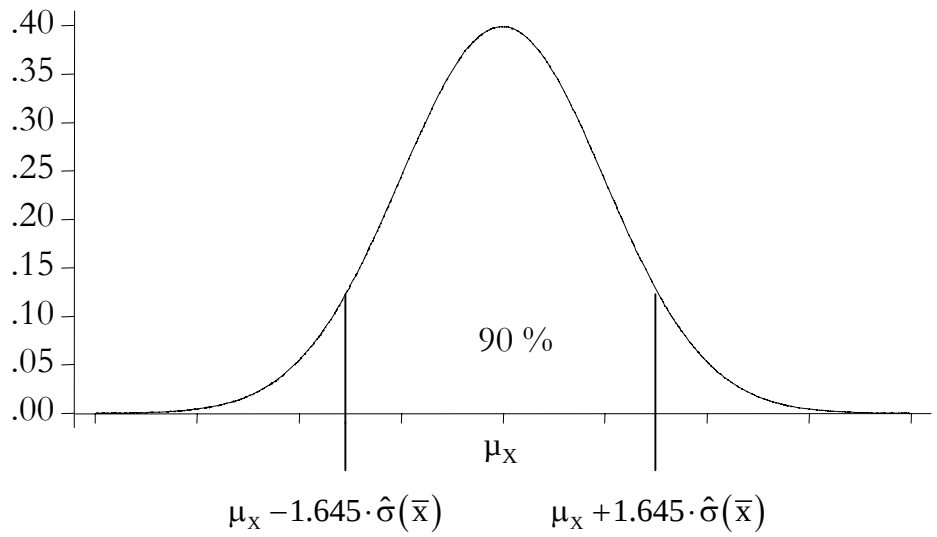
Vorgehensweise bei Intervallschätzung

$$
\begin{aligned}
0.9 &= 0.95 - 0.5 = \Phi(1.645) - \Phi(-1.645) \\
&= \Pr(-1.645 \le Z \le 1.645) \\
&= \Pr\left(-1.645 \le \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sigma(\bar{X})} \le 1.645\right) \\
&= \Pr\left(-1.645 \cdot \sigma(\bar{X}) \le \bar{X} - \mu_X \le 1.645 \cdot \hat{\sigma}(\bar{X})\right) \\
&= \Pr\left(\mu_X - 1.645 \cdot \sigma(\bar{X}) \le \bar{X} \le \mu_X + 1.645 \cdot \sigma(\bar{X})\right) \\
&= \Pr\left(\mu_X - 1.645 \cdot \frac{\sigma_X^2}{n} \le \bar{X} \le \mu_X + 1.645 \cdot \frac{\sigma_X^2}{n}\right)
\end{aligned}
$$



Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% wird ein Stichprobenmittelwert also in einem Intervall realisiert, das ±1.645 Standardfehler um den gesuchten Erwartungswert liegt.

Vorgehensweise bei Intervallschätzung



Das Intervall lässt sich so umformen, dass es zu einem Intervall um den Populationsmittelwert wird:

$$0.9 = \Pr\left(\mu_X - 1.645 \cdot \sigma\left(\bar{X}\right) \le \bar{X} \le \mu_X + 1.645 \cdot \sigma\left(\bar{X}\right)\right)$$

$$= \Pr\left(-\bar{X} - 1.645 \cdot \hat{\sigma}\left(\bar{X}\right) \le -\mu_X \le -\bar{X} + 1.645 \cdot \sigma\left(\bar{X}\right)\right)$$

$$= \Pr\left(\bar{X} + 1.645 \cdot \sigma\left(\bar{X}\right) \ge \mu_X \ge \bar{X} - 1.645 \cdot \sigma\left(\bar{X}\right)\right)$$

$$= \Pr\left(\bar{X} - 1.645 \cdot \sigma\left(\bar{X}\right) \le \mu_X \le \bar{X} + 1.645 \cdot \sigma\left(\bar{X}\right)\right)$$

Ein solches Intervall, dass mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu beobachten ist, wird als ***Konfidenzintervall*** bezeichnet.

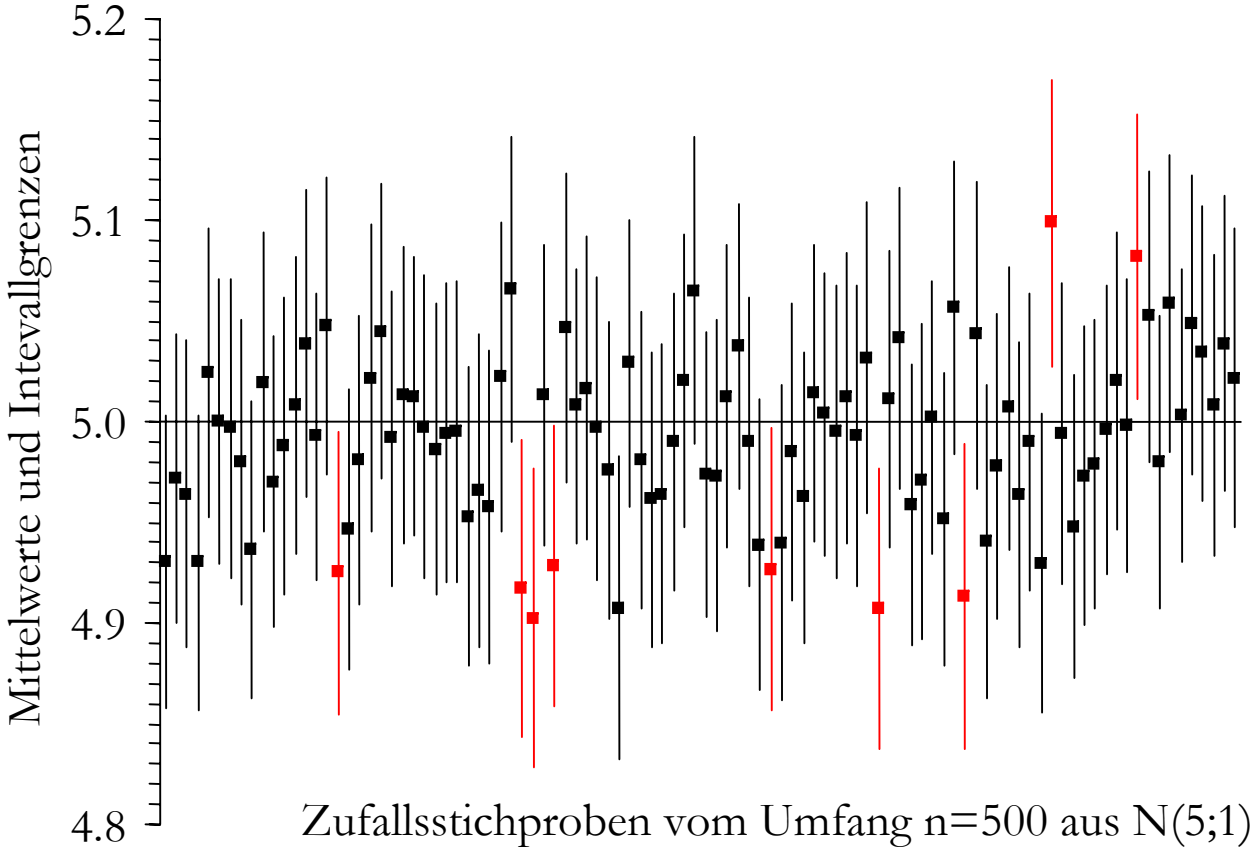
Interpretation von Konfidenzintervallen

Durch die Umformung ist das Intervall selbst bzw. sind seine Intervallgrenzen Zufallsvariablen. Mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, im Beispiel 90%, liegen die Intervallgrenzen so, dass der zu schätzende Populationsmittelwert innerhalb der Intervallgrenzen ist.
Die Wahrscheinlichkeitsaussage bezieht sich nicht auf den unbekannten Parameter, sondern auf die Zufallsvariable „Konfidenzintervall“
Die Behauptung, dass der unbekannte Populationsparameter mit bekannter Wahrscheinlichkeit in einem berechneten Intervall liegt, wäre daher falsch.

Wenn die Realisationen von Konfidenzintervallen mit einer bekannten Wahrscheinlichkeit den zu schätzenden Parameter überdecken, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies nicht der Fall ist, gleich eins minus dieser Wahrscheinlichkeit, im Beispiel also 100%-90% = 10%. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers wird als ***Irrtumswahrscheinlichkeit*** bezeichnet und durch den kleinen griechischen Buchstaben α (alpha) gekennzeichnet.

Die Berechnungsart von Konfidenzintervallen führt also dazu, dass der Anteil aller Konfidenzintervalle, die den Populationsparameter überdecken, gleich der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit ist.
Wenn diese Vertrauenswahrscheinlichkeit hoch bzw. die Irrtumswahrscheinlichkeit klein ist, dann ist das Vertrauen berechtigt, dass auch ein konkret berechnetes Intervall den zu schätzenden Wert tatsächlich enthält, auch wenn unbekannt bleibt, ob dies tatsächlich der Fall ist.

Interpretation von Konfidenzintervallen



Die Abbildung zeigt 90%-Konfidenintervalle um die Stichprobenmittelwerte von 100 Stichproben des Umfangs n=500 aus einer normalverteilten Population mit dem Populationsmittelwert 5 und einer Varianz von 1.
Von den 100 Intervallen enthalten 91 den Populationswert 5.0, neun dagegen nicht.

Vorgehensweise bei Intervallschätzung

Aus dem Beispiel lässt sich die generelle Vorgehensweise bei der Berechnung von Konfidenzintervallen verallgemeinern:

Schritt 1:
Im ersten Schritt ist ein Stichprobenkennwert auszuwählen, dessen Kennwerteverteilung bekannt ist, wobei der zu schätzende Populationsparameter ein Parameter der Verteilungsfunktion ist und ansonsten die Verteilung berechenbar sein muss.

Schritt 2:
Im zweiten Schritt wird die Irrtumswahrscheinlichkeit bzw. umgekehrt die Vertrauenswahrscheinlichkeit festgelegt.
In der Sozialforschung werden üblicherweise Irrtumswahrscheinlichkeiten von 5% oder 1% akzeptiert und entsprechend 95%- oder 99%-Konfidenzintervalle berechnet.
Je kleiner die Irrtumswahrscheinlichkeit, desto größer sind die Längen der Konfidenzintervalle. Wenn ein Konfidenzintervall zu lang ist, hat es kaum Aussagekraft.

Schritt 3:
Nach der Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit α kann das Intervall berechnet werden. Dazu werden Quantile der Kennwerteverteilung benötigt. In der Regel wird das Intervall nach der Formel

$$\text{c.i} = \text{Schätzer} \pm (1-\alpha/2)\text{-Quantil} \cdot \text{(geschätzer) Standardfehler}$$

berechnet.

Schätzung von Populationsanteilen

Bei einfachen Zufallsauswahlen ist der Stichprobenanteil ein konsistenter und erwartungstreuer Schätzer des entsprechenden Populationsanteils.
Die Kennwerteverteilung lässt sich bei einfachen Zufallsauswahlen ohne Zurücklegen über die hypergeometrische Verteilung berechnen.
Bei Zufallsauswahlen mit Zurücklegen bzw. wenn die Population um ein Vielfaches größer ist als die Stichprobe ($N > 20 \cdot n$), lässt sich die Kennwerteverteilung über die Binomialverteilung berechnen.
Bei großen Stichproben nähern sich die Kennwerteverteilungen von Stichprobenanteilen asymptotisch einer Normalverteilung an.
Die Annäherung ist hinreichend genau, wenn

$$n \cdot \frac{\pi_i}{1-\pi_i} > 9 \quad \text{und} \quad n \cdot \frac{1-\pi_i}{\pi_i} > 9$$

Der Standardfehler $\sigma(p_1)$ des Schätzers ist:

$$\sigma(p_1) = \sqrt{\frac{\pi_1 \cdot (1-\pi_1)}{n}}$$ bei einfacher Zufallsauswahl mit Zurücklegen

$$= \sqrt{\frac{\pi_1 \cdot (1-\pi_1)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}$$ bei einfacher Zufallsauswahl ohne Zurücklegen

Schätzung von Populationsanteilen

Da die Berechnung des Standardfehlers die Kenntnis des zu schätzenden Popualtionsanteils π_1 voraussetzt, wird in der Praxis oft der geschätzte Standardfehler verwendet, bei dem in der Gleichung der Populationsanteil durch seinen Schätzer ersetzt wird:

$$\hat{\sigma}(p_1) = \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1 - p_1)}{n}} \qquad \text{bei einfacher Zufallsauswahl mit Zurücklegen}$$

$$= \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1 - p_1)}{n} \cdot \frac{N - n}{N - 1}} \qquad \text{bei einfacher Zufallsauswahl ohne Zurücklegen}$$

Als Faustregel gilt: Wenn n > 60, dann ist die Schätzung des Standardfehlers für praktische Anwendungen genau genug.
Bei kleineren Fallzahlen kann der maximal mögliche Standardfehler verwendet werden, der sich ergibt, wenn der Populationsanteil π_1=0.5 ist:

$$\sigma(p_1) \leq \frac{0.5}{\sqrt{n}} \qquad \text{bei einfacher Zufallsauswahl mit Zurücklegen}$$

$$\leq \frac{0.5}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}} \qquad \text{bei einfacher Zufallsauswahl ohne Zurücklegen}$$

Schätzung von Populationsanteilen

Bei der Berechnung von Konfidenzintervalle für Anteile wird die asymptotische Annäherung der Kennwerteverteilung an die Normalverteilung genutzt.
Die Grenzen des (1-α)-Konfidenzintervalls berechnen sich nach:

$$c.i.(\pi_1) = p_1 \pm \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1 - p_1)}{n}} \cdot z_{1-\alpha/2}$$

Die Berechnung ist hinreichend genau, wenn gilt:

(a) $n \cdot p_1 / (1\text{-}p_1) > 9$ bzw. $n \cdot (1\text{-}p_1) / (p_1) > 9$
(b) $n > 60$

Soll z.B. für das Eingangsbeispiel der Stichprobe von n=100 und einem Stichprobenanteil von p_1 = 60% Befürwortern von Ganztagsschulen ein 95%Konfidenzintervall berechnet werden, dann ergeben sich die Intervallgrenzen nach:

$$c.i.(\pi_1) = 0.6 \pm \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{100}} \cdot 1.96 = 0.6 \pm 0.096$$

Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% ist zu vermuten, dass der Anteil der Befürworter in der Stadt zwischen 50.4% und 69.6% liegt.
Die Anwendungsvoraussetzungen sind erfüllt, da gilt:

$100 \cdot 0.4 / 0.6 = 66.7 > 9$ und $100 > 60$

α	z_α
0.000	-∞
0.005	-2.57
0.010	-2.326
0.015	-2.170
0.020	-2.054
0.025	**-1.960**
0.050	-1.645
0.100	-1.282

Schätzung von Populationsmittelwerten

Bei einfachen Zufallsauswahlen ist der Stichprobenmittelwert ein konsistenter und erwartungstreuer Schätzer des entsprechenden Populationsmittelwerts.
Ist eineVariable in der Population (annähernd) normalverteilt, dann ist auch die Kennwerteverteilung des Stichprobenmittelwerts (annähernd) normal.
Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt, dass unabhängig von der Verteilung in der Population ein Stichprobenmittelwert asymptotisch normalverteilt ist.
Die Annäherung ist für praktische Anwendungen genau genug, wenn n > 30.

Der Standardfehler des Schätzers berechnet sich nach:

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$ bei einfacher Zufallsauswahl mit Zurücklegen

$$= \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$ bei einfacher Zufallsauswahl ohne Zurücklegen

Schätzung von Populationsmittelwerten

Wenn - was in der Regel der Fall ist - die Populationsstandardabweichung σ_X unbekannt ist, berechnet sich der geschätzte Standardfehler nach:

$$\hat{\sigma}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{SS_X}{n \cdot (n-1)}} = \frac{s_X}{\sqrt{n-1}} = \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}$$

mit Zurücklegen

$$\hat{\sigma}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{SS_X}{n \cdot (n-1)}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{s_X}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

ohne Zurücklegen

Ist eine Variable X in der Grundgesamtheit normalverteilt und ist die Varianz oder Standardabweichung in der Grundesamtheit bekannt, dann ist die Kennwerteverteilung des Stichprobenmittelwertes ebenfalls normalverteilt.
Das $(1-\alpha/2)$-Konfidenzintervall des Mittelwerts mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α berechnet sich dann nach:

$$c.i.(\mu_X) = \bar{x} \pm \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\alpha/2}$$

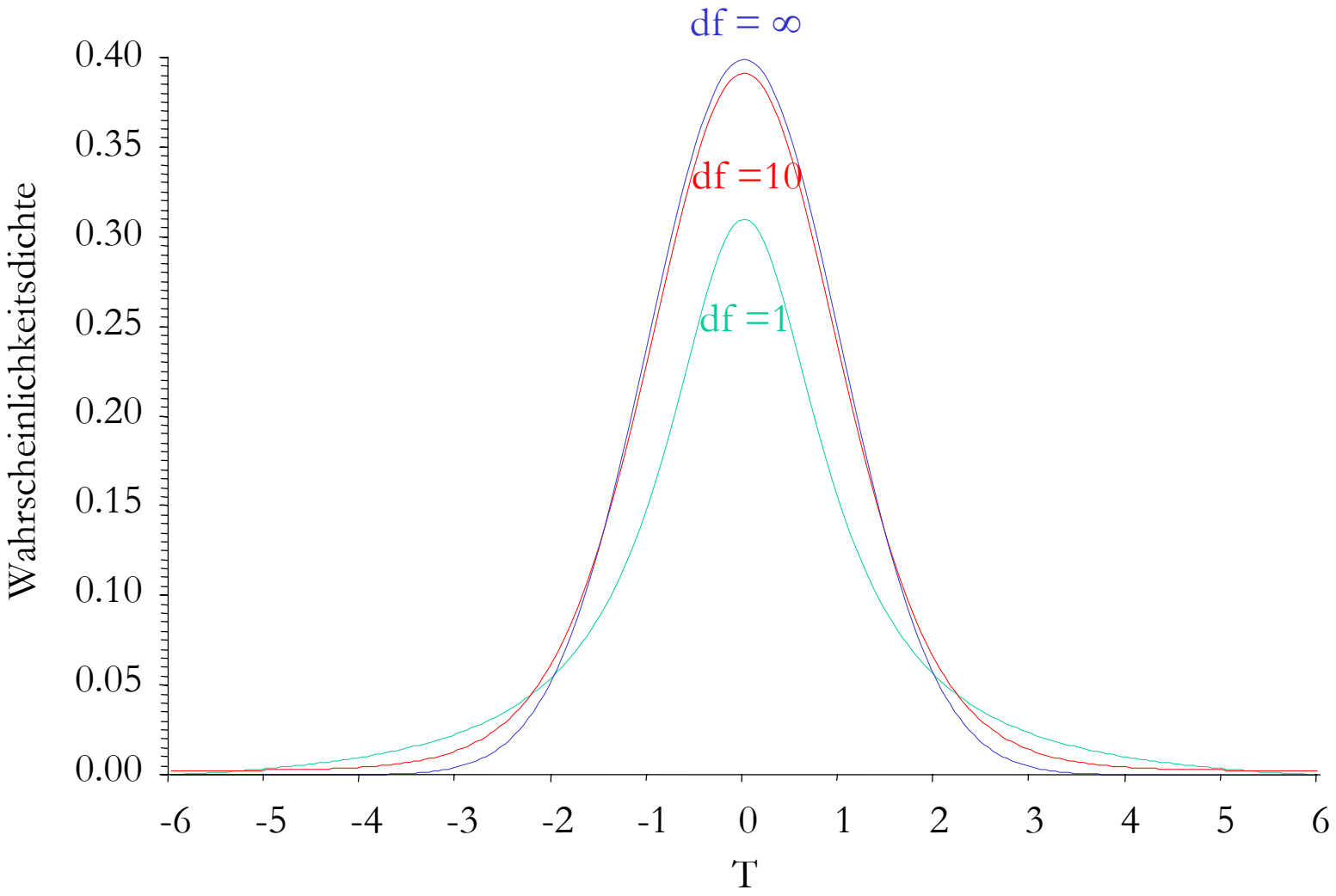
Schätzung von Populationsmittelwerten

Ist die Standardabweichung σ_X bzw. die Varianz σ^2_X in der Population unbekannt, dann ist die Kennwerteverteilung nicht länger normalverteilt, wenn bei der Berechnung von Konfidenzintervallen anstelle der unbekannten Standardabweichung die geschätzte Populationsstandardabweichung verwendet wird.
Es kann jedoch gezeigt werden, dass die Z-Transformation des Stichprobenmittelwerts in diesem Fall einer sogenannten T-Verteilung mit df = n–1 Freiheitsgraden folgt, wobei df der Parameter einer T-Verteilung ist:

$$f\left(X_i\right) = N\left(\mu_X;\sigma_X^2\right) \Rightarrow f\left(\frac{\bar{X}-\mu_X}{\sqrt{\frac{1}{n\cdot\left(n-1\right)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}}\right) = t_{df=n-1}$$

Die T-Verteilung ist eine symmetrische, unimodale Verteilung, die der Standardnormalvereilung sehr ähnlich ist, aber eine größere Varianz hat und insbesondere an den Enden der Verteilung größere Dichten aufweist.
Dies hat zur Folge, dass die Quantilwerte der T-Verteilung bei gleicher Quantilwahrscheinlichkeit weiter vom Nullpunkt entfernt sind als die entsprechenden Quantilwerte der Standardnormalverteilung.

T-Verteilung



Mit steigender Zahl von Freiheitsgraden nähert sich die T-Verteilung asymptotisch der Standardnormalverteilung an, so dass $t_{df=\infty} = N(0;1)$

Quantile der T-Verteilung

In Tabellen werden Quantilwerte von T-Verteilungen für wichtige Quantilwahrscheinlichkeiten und unterschiedliche Freiheitsgrade tabelliert:

df	75.0%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%	99.95%
1	1.000	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3	636.6
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.33	31.60
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21	12.92
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850

Quantile der T-Verteilung

df	75.0%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%	99.95%
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass das 95%-Quantil der T-Verteilung mit 60 Freiheitsgraden den Quantilwert 1.671 aufweist.
Die unterste Zeile enthält die Quantile der Standardnormalverteilung, d.h. einer T-Verteilung mit ∞ Freiheitsgraden.
Da T-Verteilungen um 0 symmetrisch verteilt sind, können aus der Tabelle auch Quantile mit Wahrscheinlichkeiten <50% abgelesen werden. So ist das 5%-Quantil der t-Verteilung mit df=60 minus eins mal dem 95%-Quantil (5% = 100% – 95%) und daher gleich -1.671.

Konfidenzintervalle für Mittelwerte aus normalverteilten Populationen

Die T-Verteilung wird für die Berechnung des $(1-\alpha/2)$-Konfidenzintervallen für Mittelwerte aus normalverteilten Populationen herangezogen.
Bei Irrtumswahrscheinlichkeit α berechnet und unbekannter Standardabweichung berechnet sich das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall nach:

$$\begin{aligned} c.i.(\mu_X) &= \bar{x} \pm \hat{\sigma}\left(\bar{x}\right) \cdot t_{1-\alpha/2,df=n-1;} \\ &= \bar{x} \pm \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2,df=n-1} \\ &= \bar{x} \pm \frac{s_X}{\sqrt{n-1}} \cdot t_{1-\alpha/2,df=n-1} \end{aligned}$$

In der Stichprobe des Allbus 1996 beträgt der Mittelwert der Befragten 46.117 Jahren, die Stichprobenvarianz ist 281.112 und die Fallzahl beträgt 3510 Personen.
Gesucht ist das 95%-Konfidenintervall für den Populationsmittelwert:

$$c.i.(\mu_X) = \bar{x} \pm \sqrt{\frac{s_X^2}{n-1}} \cdot t_{0.975,df=3509} = 46.117 \pm \sqrt{\frac{281.112}{3509}} \cdot 1.96 = 46.117 \pm 0.555$$

Quantile von T	
df	97.5%
120	1.980
∞	1.960

Da nur Personen ab 18 Jahren befragt wurden ist zu schließen, dass 1996 das durchschnittliche Alter von volljährigen Personen in Deuschland vermutlich zwischen 45.562 und 56.672 Jahren lag.

Asymptotische Konfidenzintervalle für Mittelwerte bei beliebiger Verteilung

Wenn die Variable X in der Gundgesamtheit nicht normalverteilt ist, kann anstelle eines exakten Konfidenzintervall ein asymptotisches Konfidenzintervall berechnet werden.
Die Berechnung des asymptotischen $(1-\alpha/2)$-Konfidenzintervall des Mittelwerts mit der Irrtumswahrscheinlichkeit von ungefähr α berechnet sich dann nach:

$$\begin{aligned} \text{c.i.}(\mu_X) &= \bar{x} \pm \hat{\sigma}\left(\bar{x}\right) \cdot z_{1-\alpha/2} \\ &= \bar{x} \pm \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\alpha/2} \\ &= \bar{x} \pm \frac{s_X}{\sqrt{n-1}} \cdot z_{1-\alpha/2} \end{aligned}$$

Die Annäherung ist hinreichend genau, wenn n>30.
Da Konfidenzintervalle, die über die T-Verteilung berechnet werden, länger sind als Konfidenzintervalle mit gleicher Irrtumswahrscheinlichkeit, die auf der Standardnormalverteilung beruhen, wird üblicherweise auch dann die T-Verteilung verwendet, wenn die Verteilung von X in der Population unbekannt oder nicht normalverteilt ist.
Es besteht dann eine größere Chance, dass die Konfidenzintervalle den zu schätzenden Populationsmittelwert tatsächlich überdecken. Dieses vorsichtigere Vorgehen wird als *konservatives Schätzen* bezeichnet.

Schätzung von Populationsvarianzen und Standardabweichungen

Zur Schätzung einer Populationsvarianz kann die Stichprobenvarianz verwendet werden.
Diese ist zwar konsistent, allerdings kein erwartungstreuer Schätzer.
Der Erwartungswert der Stichprobenvarianz ist bei einfachen Zufallsauswahlen (ohne Zurücklegen) nämlich:

$$\mu\left(s_X^2\right) = \mu\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right) = \sigma_X^2 - \frac{\sigma_X^2}{n} = \sigma_X^2\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Die Höhe des Verzerrungsfaktors (n-1)/n nähert sich 1, wenn die Stichprobenfallzahl n ansteigt.
Der Schätzer ist daher nur *asymptotisch erwartungstreu*.

Zur Schätzung einer Populationsvarianz wird i.a. ein bei jeder Fallzahl erwartungstreuer Schätzer verwendet, der sich aus der Stichprobenvarianz mal dem Kehrwert des Verzerrungsfaktors ergibt.
Der erwartungstreue Schätzer der Populationsvarianz ist daher:

$$\hat{\sigma}_X^2 = s_X^2\cdot\frac{n}{n-1} = \frac{SS_X}{n-1} = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

Schätzung von Populationsvarianzen und Standardabweichungen

Der Standardfehler des erwartungstreuen Schätzers der Populationsvarianz hängt von der Verteilung in der Population ab. Ist diese (annähernd) normalverteilt, gilt:

$$\sigma\left(\hat{\sigma}_X^2\right) = \sigma_X^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Die Kennwerteverteilung ist bei normalverteilten Populationen proportional zur sogenannten Chiquadratverteilung.
Konfidenztintervalle werden aber meistens nicht berechnet.

Für die Schätzung der Populationsstandardabweichung wird die Wurzel aus der geschätzten Populationsvarianz benutzt

$$\hat{\sigma}_X = \sqrt{\hat{\sigma}_X^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Die geschätze Populationsstandardabweichung ist im Unterschied zur geschätzten Varianz nur konsistent, aber nicht erwartungstreu.