Wellen

Eine Welle ist ein erkennbares Signal, welches innerhalb eines Mediums von einer Seite zur anderen übertragen wird, mit einer erkennbaren Ausbreitungsgeschwindigkeit. Energie ist oft als Welle übertragen, Materie nicht.

Wellenausbreitungen sind äusserst wichtig in mehreren Gebieten:

- Strömungsmechanik: Wasserwellen, Aerodynamik, Meteorologie, Verkehrsflüsse.
- Akustik: Akustische Wellen in Luft und Fluiden
- Physik: Optik, elektromagnetische Wellen.
- Biologie: Ausbreitung von Krankheiten, Populationsdynamik, Signalübertragung in Axonen.
- Chemie: Verbrennungsprozesse und Detonationswellen.

Wandernde Wellen

Die einfachste Form einer mathematischen Welle ist eine Funktion

$$u(x,t) = f(x - ct).$$

Dabei interpretiert man u als die Stärke des Signals. $f(x - ct)$ ist das Wellenprofil zum Zeitpunkt t, verschoben nach rechts mit ct räumlichen Einheiten. Diese Art von Wellen propagieren unverändert entlang der Geraden $x - ct$=Konstante in Raum und Zeit.

Gibt es für eine gegebene PDG eine Wandernde-Wellen-Lösung (WWL)?

I.A. fragt man sich das ohne irgendwelche Anfangsbedingungen zu haben (Zeit von $-\infty$ bis ∞). Man kann aber Randbedingungen stellen:

$$u(-\infty, t) = \text{Konstante}, \quad u(\infty, t) = \text{Konstante}.$$

Eine Wellenfrontlösung ist eine WWL der Form $u(x,t) = f(x - ct)$ (oder $u(x,t) = f(x + ct)$) mit diesen Randbedingungen. Wenn sich u bei $\pm\infty$ derselben Konstante nähert, dann heisst die Wellenfrontlösung Puls.
Mit dem WWL-Ansatz wird die allgemeine PDG

$$u_t = G(u, u_x, u_{xx})$$

zu

$$-cf'(z) = G(f(z), f'(z), f''(z)), \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Eventuell noch Randbedingungen:

$$f(-\infty) = f_0, \qquad f(\infty) = f_1.$$

Beispiel 1. (Wellengleichung)

Die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

besitzt Lösungen, welche die Superposition von rechts- und links wandernden Wellen sind:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

Beispiel 2. (Diffusionsgleichung)

Die Diffusionsgleichung kann keine nichtkonstanten Wellenfronten propagieren:

In der Tat, mit $u(x,t) = f(x-ct)$ und der Notation $z = x - ct$ erhält man aus der Diffusionsgleichung die GDG

$$-cf'(z) = Df''(z), \qquad z \in \mathbb{R},$$

welche die allgemeine Lösung

$$f(z) = a + be^{\frac{-cz}{D}}$$

besitzt, mit a,b beliebigen Konstanten. Damit nun $f(\pm\infty)$ =Konstante gilt, muss $b = 0$ sein.

Oft stellt sich in der Ökologie die Frage, ob und wie gewisse Spezies in ein Habitat eindringen können. Das wollen wir mit Hilfe der Wandernden-Wellen-Lösungen (WWL) einer RDG anhand des Beispiels der Fisher-Gleichung illustrieren.

Betrachte dazu die Fisher-Gleichung

$$u_t = Du_{xx} + \mu u(1-u)$$

auf ganz $\mathbb{R}$. Wir suchen nach Lösungen $u(t,x)$, welche die Form einer sich mit konstanter Geschwindigkeit c bewegenden wandernden Welle haben. Eine solche Lösung hat die Form

$$u(t,x) = \phi(x-ct).$$

Für $c > 0$ ist $\phi(x-ct)$ die Funktion $\phi(x)$ verschoben nach rechts mit ct. Der Parameter c heißt Wellengeschwindigkeit, die Variable $z := x - ct$ heißt Wellenvariable, und die Funktion $\phi(z)$ ist das Wellenprofil.

Wir machen den Wandernden-Wellen-Ansatz (WWA)

$$u(t,x) = \phi(x-ct), \quad \phi(-\infty) = 1, \quad \phi(\infty) = 0.$$

Der WWA liefert uns eine Art "Randbedingungen" bei $\pm\infty$. Wenn $x \to -\infty$, dann hat die Population bereits ihre Tagfähigkeit erreicht, während bei $x \to \infty$ ist sie noch nicht angekommen.

Aus dem WWA folgt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -c\phi', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \phi''$$

und unsere RDG reduziert sich auf die GDG für $\phi(z)$:

$$-c\phi' = D\phi'' + \mu\phi(1-\phi).$$

Mit der Notation $\psi := \phi'$ erhält man ein System von GDGen

$$\begin{aligned} \phi' &= \psi \\ \psi' &= -\frac{c}{D}\psi - \frac{\mu}{D}\phi(1-\phi). \end{aligned}$$

Wieder sind die Gleichgewichtspunkte $P_1 = (0,0)$ (stabil für $c > 0$) und $P_2 = (1,0)$ (instabil).

- P_1 ist ein stabiles Spiral für $c < 2\sqrt{D\mu}$
- P_1 ist ein stabiler Knoten für $c > 2\sqrt{D\mu}$.
- P_2 ist immer ein Sattelpunkt.

Aus den Randbedingungen für ϕ folgt, daß $\psi(\pm\infty) = 0$. Also gibt es je eine Verbindung zwischen P_2 und P_1 (letzterer als Spiral, bzw. als Knoten).

Da ϕ nicht negativ sein kann (als Profil einer Populationsdichte), sind die Lösungen mit $c < 2\sqrt{D\mu}$ nicht biologisch relevant. Somit ist die minimale Geschwindigkeit c^* für die Existenz einer Wellenfrontlösung $c^* = 2\sqrt{D\mu}$.

Das war eine ziemlich heuristische Begründung. Für etwas mehr Mathematik s. Källen, Arcuri & Murray '85.

Betrachten wir nun die (allgemeinere) Fisher-Gleichung

$$u_t = Du_{xx} + f(u),$$

mit dem Reaktionsterm in der Form $f(u) = \mu u(1 - \frac{u}{K})$.

Annahmen: $\exists K > 0$ s.d.

- $f(0) = 0,\ f(K) = 0,$
- $f(u) > 0\ \forall 0 < u < K$
- $f'(0) > 0,\ f'(K) < 0.$

Wenn $f'(0)u > f(u)\ \forall u \in \mathbb{R}_+$, dann ist die minimale Wellengeschwindigkeit

$$c^* = 2\sqrt{Df'(0)}.$$

Diese ist genau der Wert wo $(0, 0)$ von einem Spiral zu einem Knoten wird.

Die lineare Konjektur

Mit dem WWA $u(x,t) = \phi(x - ct)$ ist die Jacobi-Matrix des Systems für das Wellenprofil ϕ in $(0,0)$

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{D}f'(0) & -\frac{c}{D} \end{pmatrix}.$$

Deren EW sind $\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2D} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2}{D^2} - 4f'(0)\frac{1}{D}}$, also ist $(0,0)$ ein Knoten g.d.w. $c^2 - 4Df'(0) > 0$. Für $c^* = 2\sqrt{Df'(0)}$ gibt es einen doppelten EW:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c^*}{2D},$$

also verhält sich die Lösung in einer Umgebung von $(0,0)$ wie $e^{-\frac{c^*}{2D}x}$. Was passiert für $x \to \infty$?

In vielen Fällen reicht es, das Wellenprofil für große x's zu messen, um eine gute Approximation der Wellengeschwindigkeit c^* zu bekommen.

Die Ähnlichkeitsmethode erlaubt es, PDGen auf GDGen zu reduzieren. Sie nutzt die natürlichen Symmetrieeigenschaften einer PDG (unsere Gleichungen sind Modelle für echte physikalische Prozesse) und erlaubt spezielle Variablen zu definieren, welche die Reduktion erleichtern.

Die Ähnlichkeitsmethode kann für alle Arten von PDGen benutzt werden, doch besonders gut funktioniert sie für Diffusionsgleichungen. Wir schauen uns hier die Dehnungsmethode an.

Betrachten wir die PDG

$$G(x, t, u, u_x, u_t) = 0.$$

Definition

Die Transformation T_ϵ der Form

$$\tilde{x} = \epsilon^a x, \quad \tilde{t} = \epsilon^b t, \quad \tilde{u} = \epsilon^c u,$$

mit a, b, c Konstanten und $\epsilon \in I$, wobei I ist ein offenes Intervall, welches $\epsilon = 1$ enthält, ist eine ein-Parameter Familie von Dehnungstransformationen.

Damit erhält man mit den Notationen $p := u_x$ und $q := u_t$:

$$\tilde{p} = \epsilon^{c-a} p, \qquad \tilde{q} = \epsilon^{c-b} q.$$

Was bedeutet die Invarianz der PDG under T_ϵ?

Beispiel. Nichtlineare Advektionsgleichung:

$$u_t + uu_x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad q + up = 0.$$

Im System mit transformierten Koordinaten ist der zugehörige Operator $\tilde{q} + \tilde{u}\tilde{p}$. Mit Hilfe von T_ϵ erhält man

$$\tilde{q} + \tilde{u}\tilde{p} = \epsilon^{c-b} q + \epsilon^{2c-a} up.$$

Mit $b = a - c$ wird das zu

$$\tilde{q} + \tilde{u}\tilde{p} = \epsilon^{2c-a}(q + up),$$

also ist die transformierte PDG ein Vielfaches der ursprunglichen PDG unter der Transformation

$$\tilde{x} = \epsilon^a x, \quad \tilde{t} = \epsilon^{a-c} t, \quad \tilde{u} = \epsilon^c u, \qquad (*)$$

mit a und c beliebigen Konstanten.

Definition

Die PDG ist invariant unter der ein-Parameter Familie T_ϵ von Dehnungstrafos g.d.w. es eine glatte Funktion $f(\epsilon)$ gibt, s.d.

$$G(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q}) = f(\epsilon) G(x, t, u, p, q)$$

für alle $\epsilon \in I$ mit $f(1) = 1$. Falls $f(\epsilon) = 1$ für alle $\epsilon \in I$, dann ist die PDG absolut invariant.

Satz

Wenn die PDG unter T_ϵ invariant ist, dann wird die PDG mittels

$$u = t^{c/b} y(z), \qquad z = \frac{x}{t^{a/b}}$$

auf eine GDG erster Ordnung in $y(z)$ reduziert, welche die Form

$$g(z, y, y') = 0$$

besitzt.

Die neue unabhängige Variable z heisst Ähnlichkeitsvariable und die obige Trafo heisst Ähnlichkeitstransformation. Lösen der GDG und Substitution in der Ähnlichkeitstransformation liefert die selbstähnliche Form der Lösung u.

Beispiel. Die nichtlineare Advektionsgleichung war invariant unter der Trafo $(*)$. Dann ist die Ähnlichkeitstrafo

$$u = t^{c/(a-c)} y(z), \qquad z = \frac{x}{t^{a/(a-c)}}.$$

Damit wird die PDG zur GDG

$$yy' + \frac{a}{a-c} zy' + \frac{c}{a-c} y = 0.$$

Die Ähnlichkeitsmethode kann leicht zum Fall der PDGen 2. Ordnung erweitert werden.

Satz

Falls die PDG

$$G(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0$$

invariant unter der ein-Parameter Familie T_ϵ von Dehnungstrafos ist, dann wird die PDG unter $(*)$ auf eine GDG 2. Ordnung reduziert:

$$g(z, y, y', y'') = 0.$$

Bemerkung. Mit den Notationen

$$r = u_{xx}, \qquad s = u_{xt}, \qquad v = u_{tt}$$

schreibt sich die Trafo der Ableitungen 2. Ordnung:

$$\tilde{r} = \epsilon^{c-2a} r, \qquad \tilde{s} = \epsilon^{c-a-b} s, \qquad \tilde{v} = \epsilon^{c-2b} v.$$