Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 11 , Abgabe: Freitag, 19.01.2000, 11.00 Uhr

Aufgabe 38: (4 Punkte)
Zur Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 9 & 0.6 \\ 0.6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

führe man ausgehend von $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zwei Schritte des Gesamt- und Einzelschrittverfahrens durch. Berechnen Sie die Anzahl der Iterationen k, die für die Genauigkeit $\|\bar{x} - x^{(k)}\|_\infty \leq 10^{-6}$ benötigt wird.

Aufgabe 39: (4 Punkte)
Sei A eine $(m \times n)$-Matrix mit $n \leq m$ und $\mathrm{rang}(A) = n$. Sei $0 < r < \frac{2}{\sigma_1^2}$, wobei σ_1^2 der größte Eigenwert von $A^T A$ ist.

Zeigen Sie: Die Iteration

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - rA^T(Ax^{(k)} - y)$$

konvergiert für jede Wahl von $x^{(0)},\ y$ gegen eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - Ax\|_2 \,.$$

Aufgabe 40: (3+1 Punkte)
Betrachten Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

das Gesamtschrittverfahren $x^{(k+1)} = C_G x^{(k)} + d$ mit $C_G = -D^{-1}(L+R),\ d = D^{-1}b$.

(a) Überlegen Sie, dass das starke Zeilensummenkriterium nicht erfüllt ist. Zeigen Sie, dass das GS-Verfahren konvergent ist. Berechnen Sie dazu $\rho(C_G)$.

(b) Berechnen Sie $x^{(1)}$ mit $x^{(0)} = (0,1,1)^T$.