

Wiederholung

➡ Die Welt besteht aus

HADRONEN {
BARYONEN
MESONEN

LEPTONEN {
 e, μ, τ
Neutrinos

➡ Kernphysik → Physik der stabilen Baryonen (NUKLEONEN)

➡ eine „starke“ bzw. hadronische Wechselwirkung „bindet“ Nukleonen

➡ Bindungsenergie: $\sim 7-8$ MeV/Nukleon

($\sim 0,8\%$ der Masse) $E_B = Z \times M_p + N \times M_n - M_A$

➡ Neue Einheit der Masse: $1 \text{ amu} = \frac{1}{12} M(^{12}\text{C} - \text{Atom})$

➡ Ausdehnung & Reichweite von Kernkräften

π -ische, μ -ische Atome

Elektronenstreuung, Rutherfordstreuung

Befund

➡ Kernradien skalieren mit $A^{1/3}$

$$R = r_0 A^{1/3}; \quad r_0 \sim 1,25 \text{ fm}$$

➡ Kernvolumen $\sim A$ $V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A = c_0 A$

➡ Kerndichte ist konstant $\rho_K = \frac{M}{V} = \frac{c_1 A}{c_0 A} = \text{const}$

mittlere Dichte der Kerne ist konstant

➤ SÄTTIGUNG

Ansatz zur Beschreibung der Bindungsenergie

Tröpfchenmodell (Bethe-Weizsäcker, 1935)

Kern ist ein Tropfen kondensierter Kernmaterie & inkompressibel

- Alle globalen Eigenschaften der Kerne werden damit erklärbar
 - Stabilitätsbedingungen
 - Spaltung
 - α -Zerfall
 - β -Zerfallsbedingungen

Bethe-Weizsäcker Massenformel

Bindungsenergie $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$

$$B_1 = a_V A$$

Volumenterm

(Kondensationsenergie)
grobe Konstanz von B/A

$$B_2 = -a_S A^{2/3}$$

Oberflächenenergie

($O \sim R^2 \sim A^{2/3}$)

$$B_3 = -a_C Z^2 A^{-1/3}$$

Coulomb-Abstoßung

(Kugel: $E_C = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$)

$$B_4 = -a_A \frac{(Z - \frac{A}{2})^2}{A}$$

Asymmetrie

(aus Fermigasmodell)

$$\sim \frac{(Z - N)^2}{Z + N}$$

$$B_5 = \begin{cases} +\delta & gg - \text{Kern} \\ 0 & ug - gu - \text{Kern} \\ -\delta & uu - \text{Kern} \end{cases}$$

Paarungs-
energie

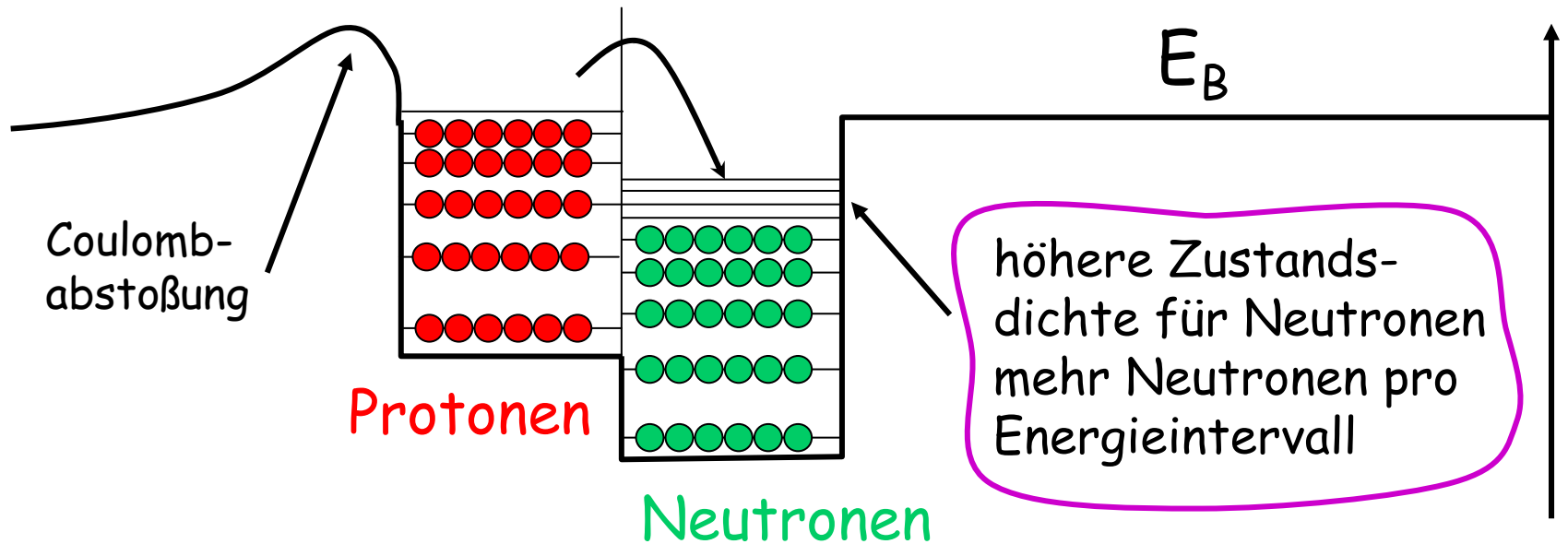
gleichartige Nukleonen
paaren sich

$$\delta = a_P A^{-1/2}$$

empirisch

Der Asymmetrieterm

naive Vorstellung



Wenn Protonen-Niveaus zu hoch gegenüber Neutronen-Niveaus liegen erfolgt



β^+ - Zerfall

Damit:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3}$$

$$- a_c Z^2 A^{-1/3} - a_A \frac{(Z - \frac{A}{2})^2}{A}$$

$$+ \begin{cases} \delta \\ 0 \\ -\delta \end{cases} \leftarrow a_p A^{-1/2}$$

$$a_v = 15.85 \text{ MeV}$$

$$a_s = 18.35 \text{ MeV}$$

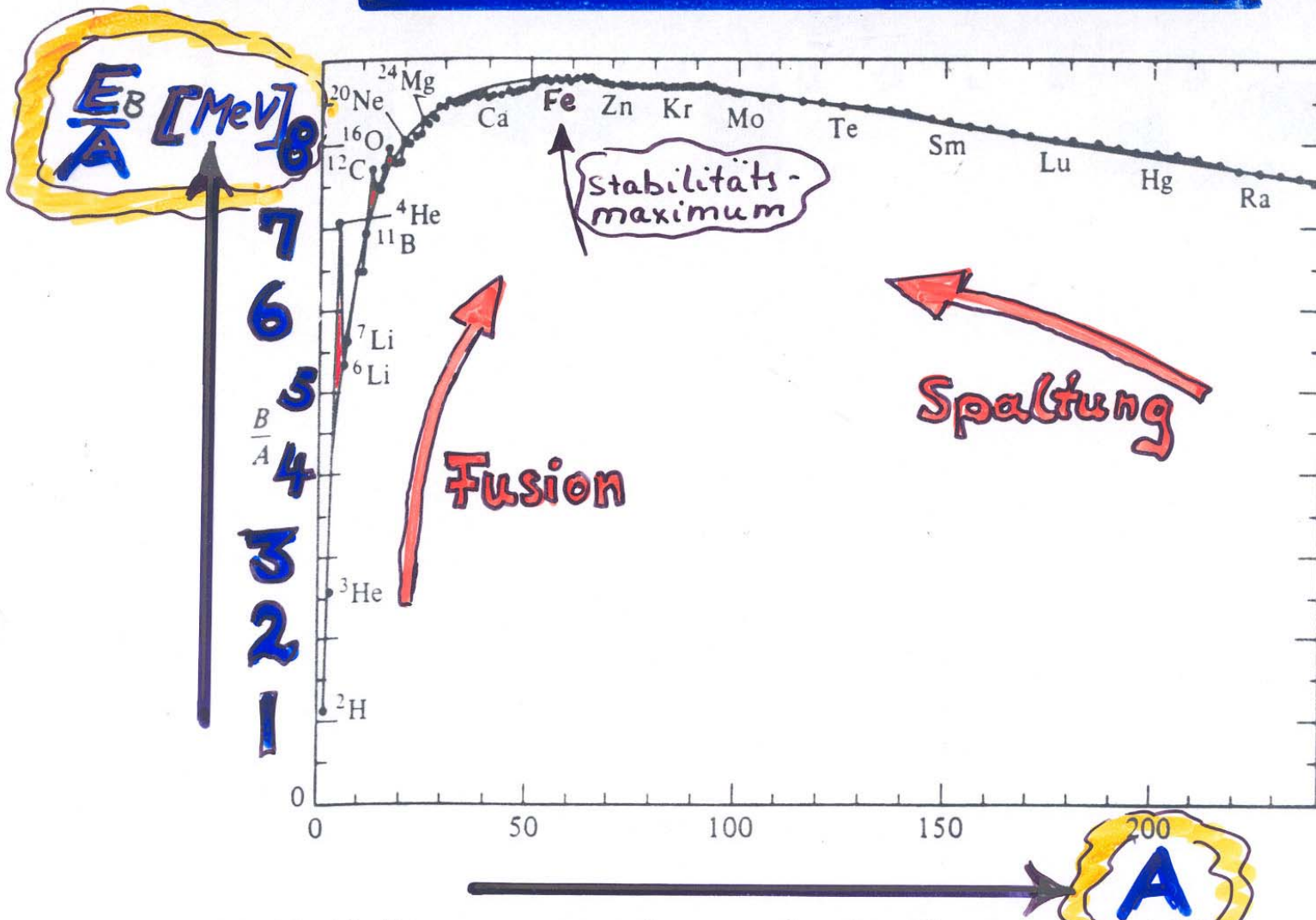
$$a_c = 0.71 \text{ MeV}$$

$$a_A = 92.8 \text{ MeV}$$

$$a_p = 11.46 \text{ MeV}$$

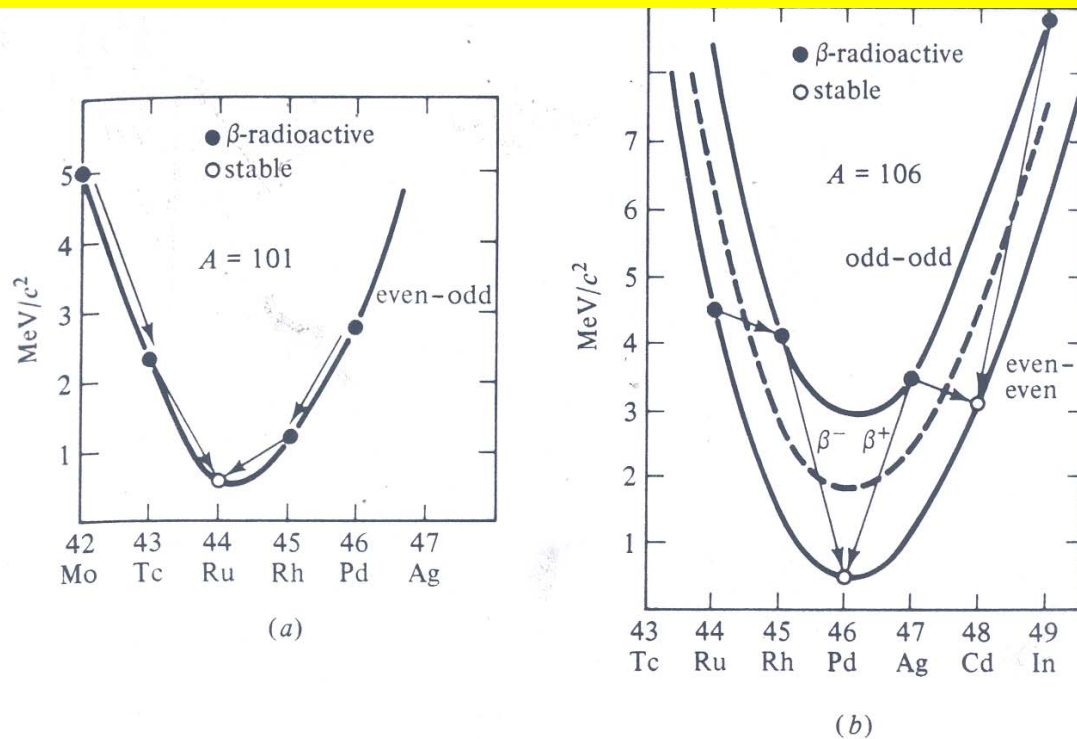
B ist quadratisch in Z (N)

Bindungsenergien pro Nukleon



2.4. The binding energy per nucleon as a function of mass number A . The smooth curve is from a semi-empirical mass formula similar to equation 2.3. (From Leighton, R. B., *Principles of Modern Physics*. McGraw-Hill (1959).)

Bindungsverhältnisse längs einer Isobaren und Beta-Zerfallsketten

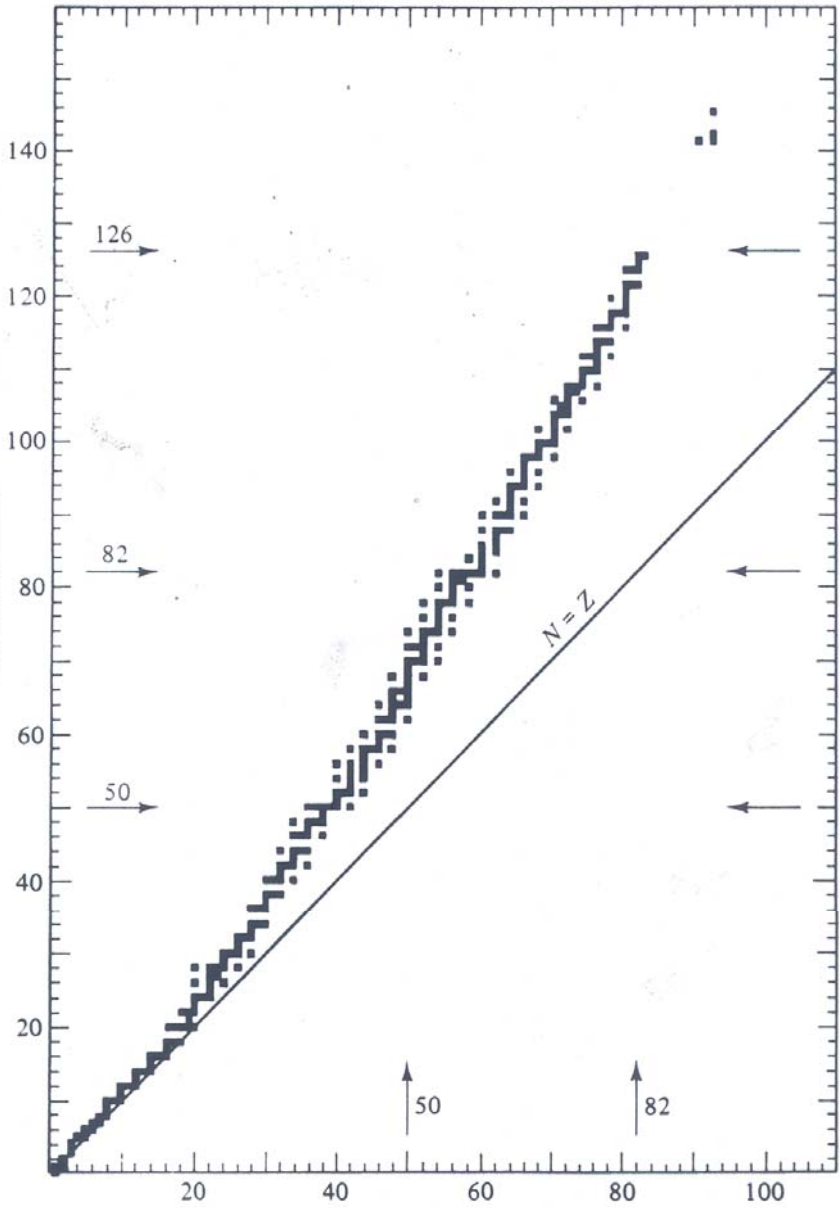


2.6. Variation of mass with Z for (a) odd-A isobars (A = 101); (b) even-A isobars (A = 106). (From Segrè, E., *Nuclei and Particles*. Benjamin (1977).)

N

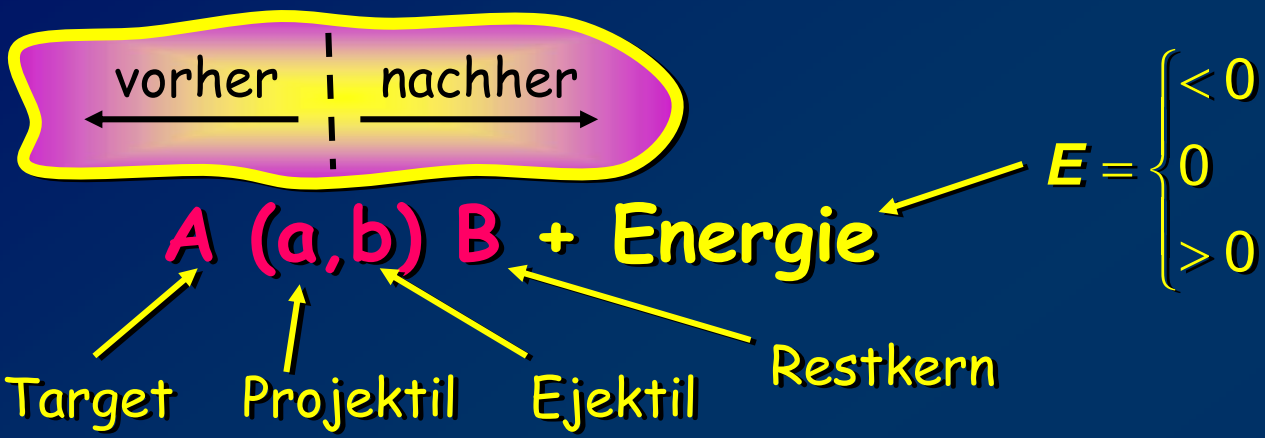


Neutron number N



Z

Kernreaktionen & Wirkungsquerschnitt

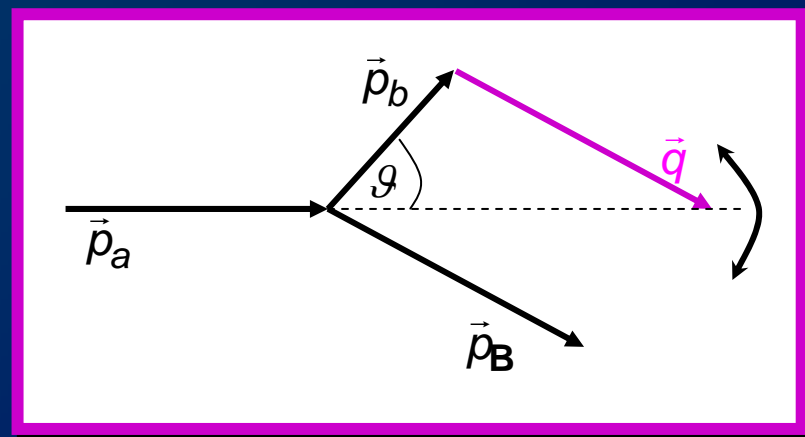


Beispiel: $^{197}\text{Au}(\alpha, \alpha)^{197}\text{Au}$
 $^4\text{He}(\pi^-, \pi^+)^4\text{n}$ ← ?

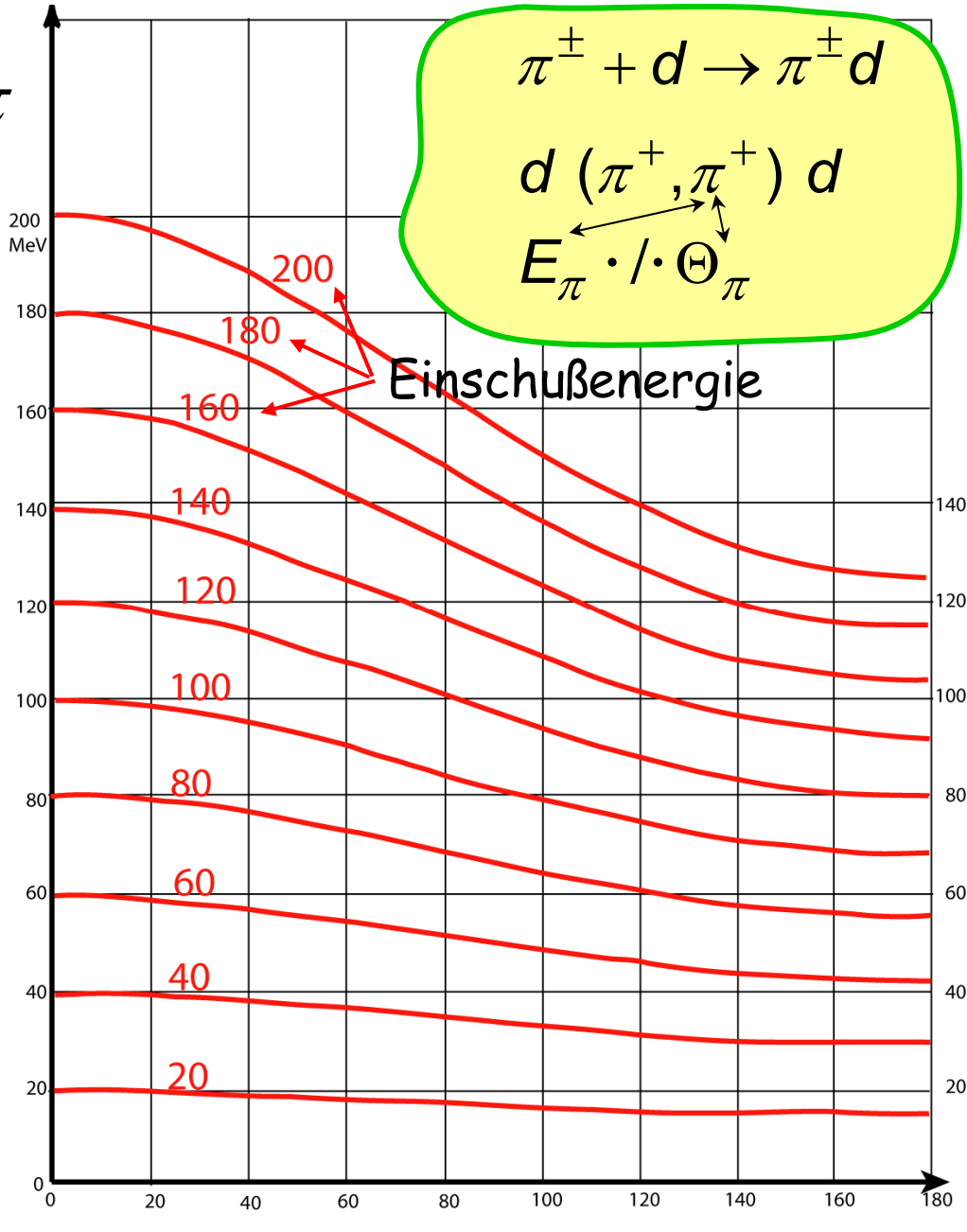
Kinematik (i.a.: $\vec{p}_A = 0, E_A = 0$)

einfachster Fall:
 2-Körper-Kinematik

$\vec{p}_a = \vec{p}_b + \vec{p}_B$
 $E_a = E_b + E_B$



E_{π}



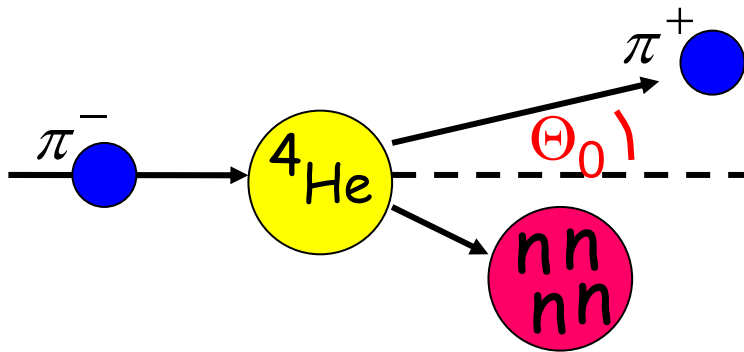
Θ_{π}

Beispiel:



Frage: Existiert ein gebundenes Tetraneutron?

ja



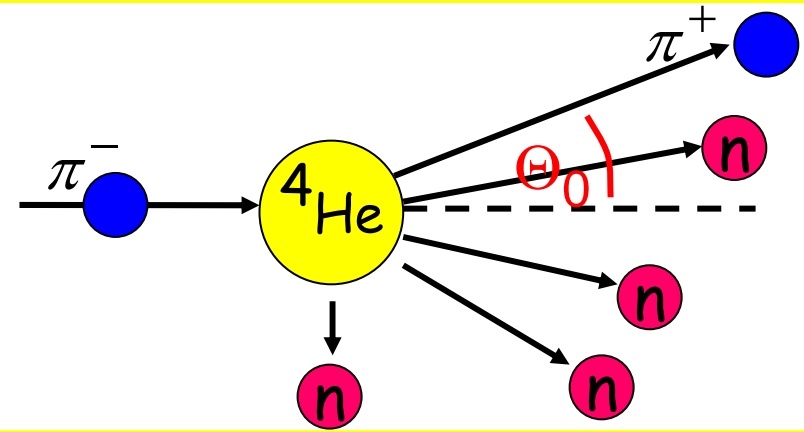
E_{π^+} ist eindeutig definiert durch

E_{π^-}

Θ_0

$m({}^4\text{He}) - m({}^4n) = E_B$

nein

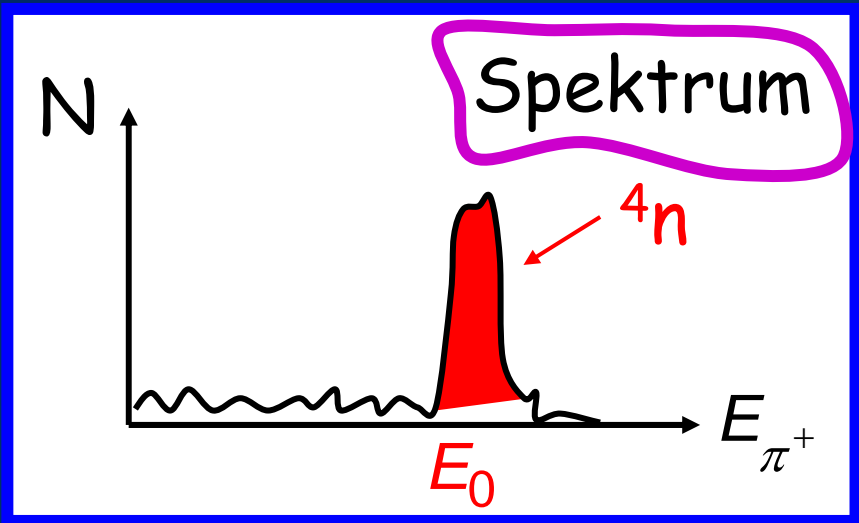
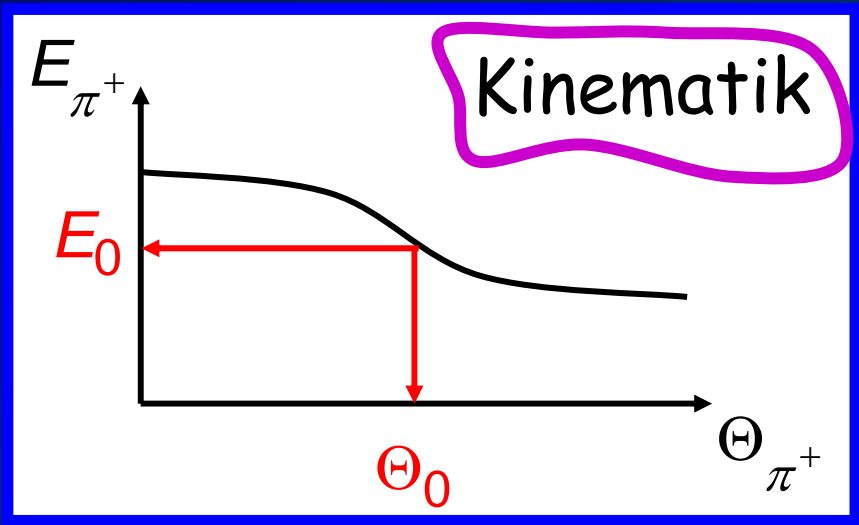


E_{π^+} kann viele verschiedene Werte annehmen (Phasenraum)

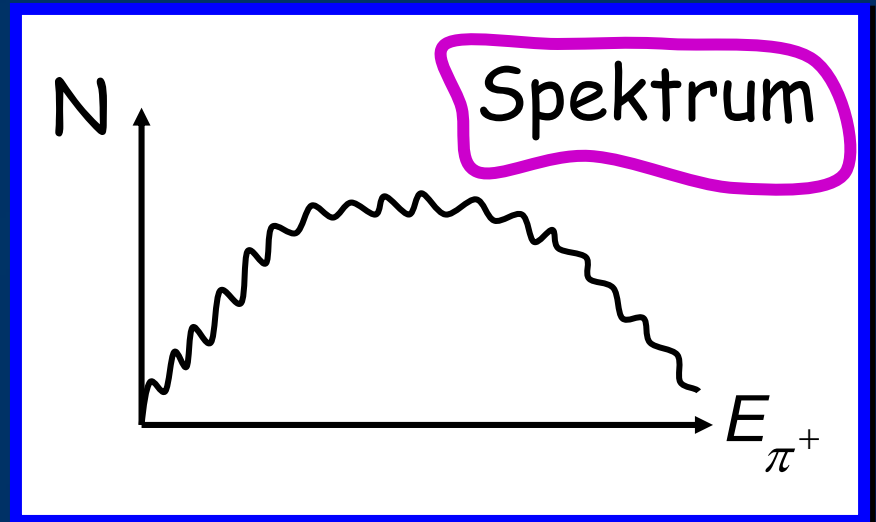
keine

Zwei-Körper Kinematik

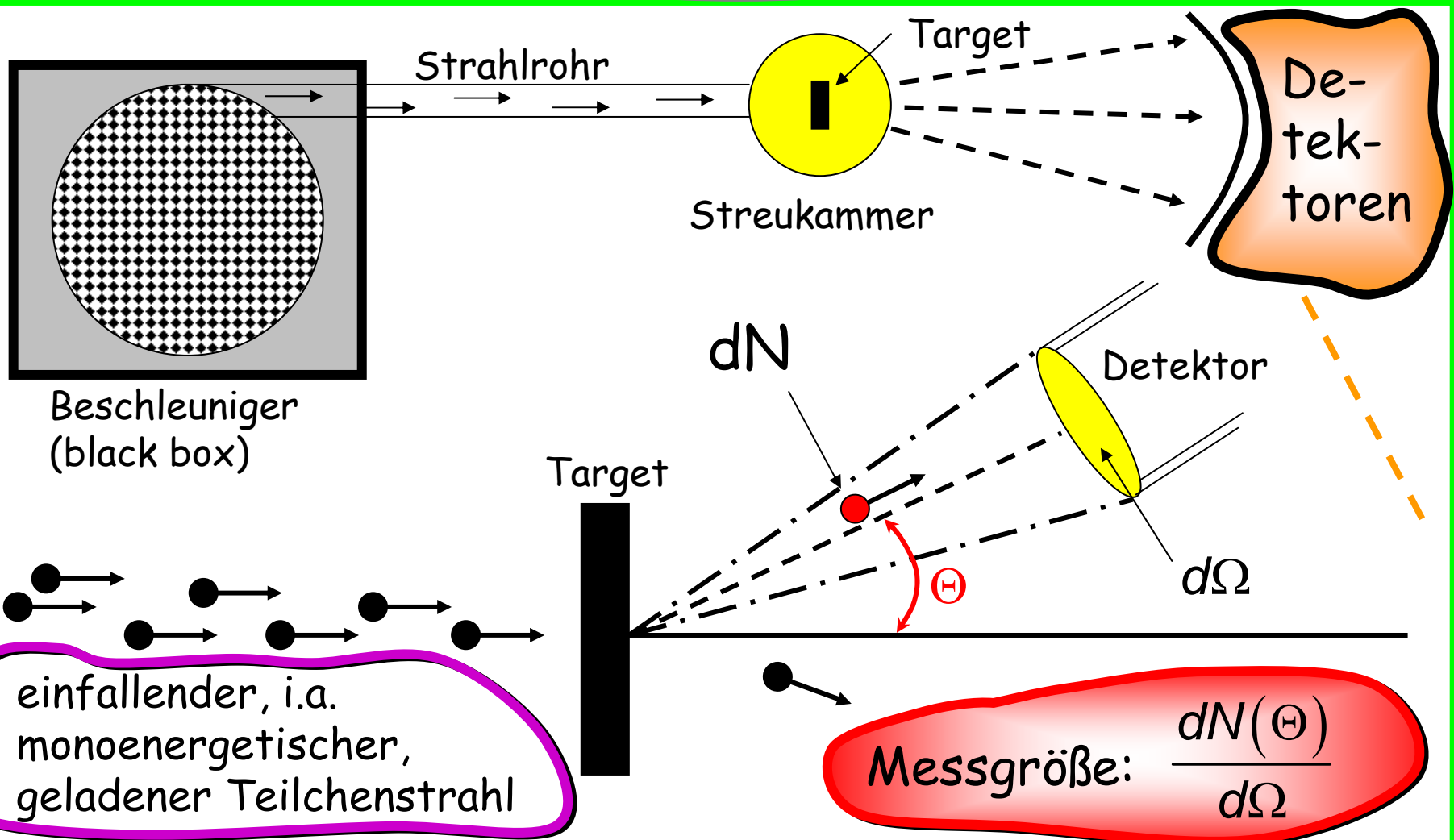
ja



nein



prinzipieller Aufbau eines Streuexperimentes



Streuquerschnitt, Streuwahrscheinlichkeit, differentieller Streuquerschnitt

Definition

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\text{Zahl gestreuter Teilchen/sec}}{d\Omega} \frac{1}{\text{Zahl der Streuzentren/cm}^2} \\ &\times \frac{1}{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen/sec}} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sr}} \right] \\ &= \frac{dN}{d\Omega} \frac{1}{N_0} \frac{1}{I_0} \end{aligned}$$

(= Zahl der Versuche)

totaler Streuquerschnitt

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\Theta d\Theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Theta) \sin\Theta d\Theta \end{aligned}$$

Streuquerschnitt, Streuwahrscheinlichkeit, diff. Streuquerschnitt

Definition

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Zahl gestreuter Teilchen/sec}}{d\Omega} \cdot \frac{1}{\text{Zahl d. Streuzentren/cm}^2}$$

$$\times \frac{1}{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen/sec}} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sr}} \right]$$

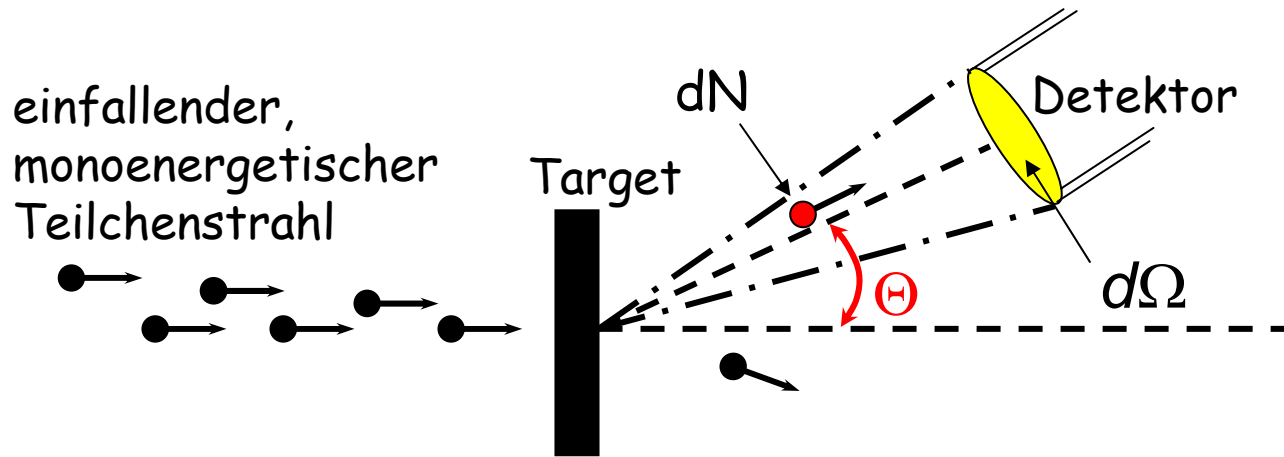
(= Zahl der Versuche)

$$= \frac{dN}{d\Omega} \cdot \frac{1}{N_0} \cdot \frac{1}{I_0}$$

totaler Streuquerschnitt

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

Anschauliche Bedeutung von σ



Zahl der Streuungen/sec $dN_{\text{Streu}} \sim N_{\text{in}}$ einlaufender Fluß (Teilchen/sec)

$\sim N_0$ Zahl der Streuzentren pro projizierte Fläche, auf die der Strahl trifft

$\sim d\Omega$ Raumwinkel des Detektors bei Θ

d.h.:

$$dN_{\text{Streu}} = N_{\text{in}} \cdot N_0 \cdot d\Omega \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$\gamma \quad N_{\text{Streu}} = N_{\text{in}} \cdot N_0 \cdot \sigma_{\text{tot}}$$

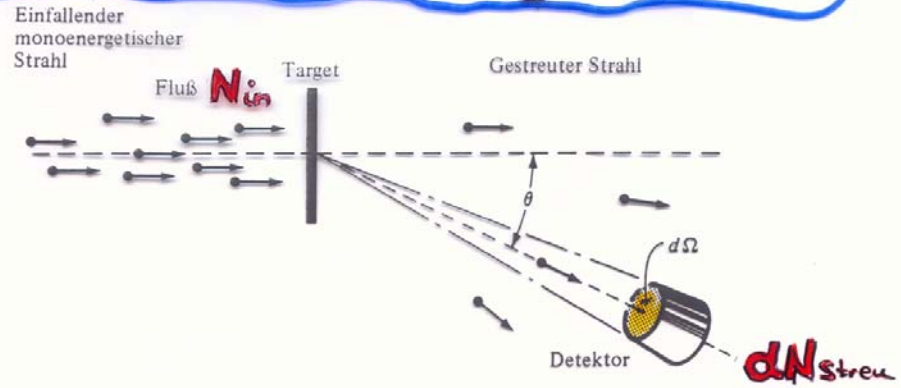
$$\sigma_{\text{tot}} = \int_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

oder

$$\frac{N_{\text{Streu}}}{N_{\text{in}}} = N_0 \left[\frac{1}{\text{Fläche}} \right] \cdot \sigma_{\text{tot}}$$

σ_{tot} ist eine Fläche!

anschauliche Bedeutung von σ



Zahl der Streuungen / sec

$dN_{streu} \sim N_{in}$ einlaufender Fluß (Teilchen / sec)

$\sim N_0$ Zahl der Streuzentren pro projizierte Fläche, auf die der Strahl trifft

$\sim d\Omega$ Raumwinkel des Detektors bei θ

d.h:

$$dN_{streu} = N_{in} \cdot N_0 \cdot d\Omega \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$N_{streu} = N_{in} \cdot N_0 \cdot \sigma_{tot}$$

$$\sigma_{tot} = \int_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

oder

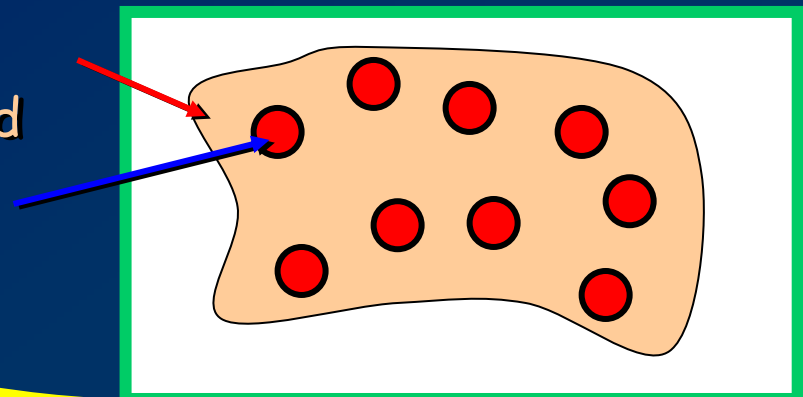
$$\frac{N_{streu}}{N_{in}} = N_0 [\text{Fläche}] \sigma_{tot}$$

σ_{tot} ist eine Fläche!

Target

Fläche, die vom Strahl getroffen wird

N_0 Streuzentren, jedes mit dem Streuquerschnitt σ_{tot} belegt (homogene Verteilung)



$$N_0 \left[\frac{\text{Zahl}}{\text{cm}^2} \right] = \frac{N_L}{A} \frac{m_{\text{Target}}}{\text{Fläche}} = \frac{N_L}{A} \mu$$

- A – Molgewicht in [g]
- m_{Target} in [g]
- μ – Massenbelegung in $\left[\text{g/cm}^2 \right]$
- Fläche in $\left[\text{cm}^2 \right]$
- $N_L = 6,023 \cdot 10^{23}$

Zahl der einlaufenden Teilchen I_0

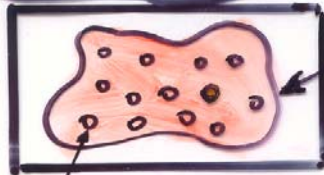
1 Elementarladung = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Asec

$\succ 1 \text{ A} = 6,2 \cdot 10^{18}$ Teilchen/sec

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 0,266 \frac{dN[1/\text{sec}]}{d\Omega[\text{msr}]} \frac{A}{I_0[\text{nA}]} \frac{1}{\mu \left[\frac{\text{mg}}{\text{cm}^2} \right]} \left[\frac{\text{mb}}{\text{sr}} \right]$$

$$1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2 = 10^{-31} \text{ m}^2$$

Target



Fläche, die vom Strahl getroffen wird

N_0 Streuzentren, jedes mit dem Streuquerschnitt σ_{tot} belegt (homogene Verteilung)

$$N_0 \left[\frac{\text{Zahl}}{\text{cm}^2} \right] = \frac{N_L}{A} \frac{m_{\text{Target}}}{\text{Fläche}} = \frac{N_L}{A} \mu$$

A - Molgewicht in [g]

m_{Target} in [g]

Fläche in [cm^2]

μ - Massenbelegung in [g/cm^2]

$$N_L = 6.023 \cdot 10^{23}$$

Zahl der einlaufenden Teilchen I_0

$$1 \text{ Elementarladung} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Asec}$$

$$> 1 \text{ A} = \frac{1}{1.6} \cdot 10^{19} \text{ Teilchen/sec}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 0.266 \frac{dN [\text{1/sec}]}{d\Omega [\text{msr}]} \frac{A}{I_0 [\text{nA}]} \frac{1}{\mu [\frac{\text{mg}}{\text{cm}^2}]} \left[\frac{\text{mb}}{\text{sr}} \right]$$

$$1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2 = 10^{-31} \text{ m}^2$$

Einheit des WQ.

$$1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ fm}^2 = 10^{-30} \text{ m}^2$$

$$= 10^{-26} \text{ cm}^2$$

$$= 10 \text{ mb}$$

Beispiel für ν -Wirkungsquerschnitte
(schwache Wechselwirkung)

$$\sigma_{\nu} \approx 0 (10^{-40} \text{ cm}^2)$$

Coulombstreuung / Rutherford-Streuung

Kurzer Abriss:

Ausgangsgleichungen:

$$\bullet \quad \mathbf{d\vec{p}} = \vec{K} dt$$

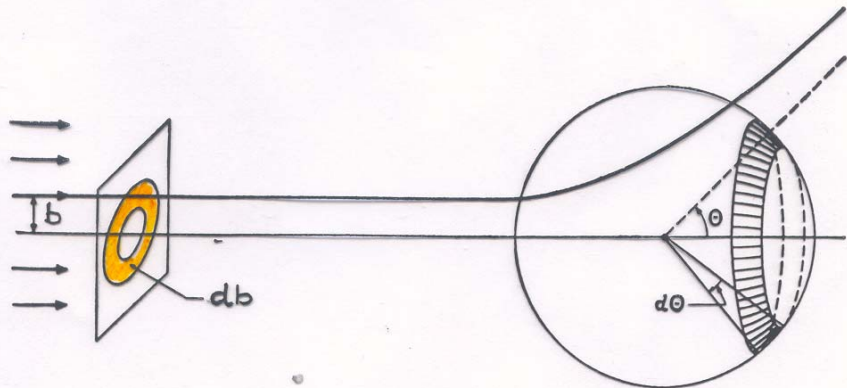
$$\vec{q} = \int_0^{\infty} \vec{K} dt$$

$$\bullet \quad \vec{K} = -\nabla \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \right) = \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}_q}{r}$$

$$\bullet \quad L = |\vec{r} \wedge \vec{p}| = m v b = m r^2 \frac{d\alpha}{dt} = \text{const}$$



$$b = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{2E} \cot \frac{\theta}{2}$$



$$dN = I_0 \cdot 2\pi b db$$

Zusammenhang zwischen b und Θ
 nur bei Coulombstreuung

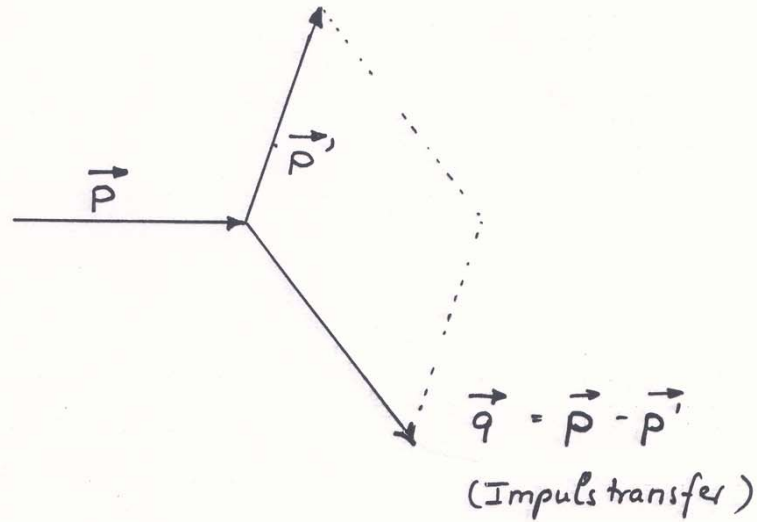
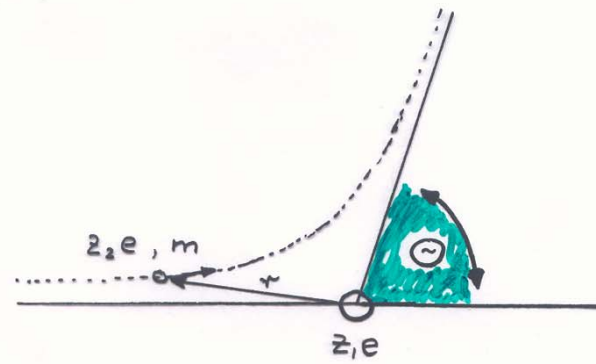
$$= I_0 \cdot 2\pi \left(\frac{z_1 z_2}{2E} \right)^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \frac{\Theta}{2}}{\sin^3 \frac{\Theta}{2}} d\Theta$$

$$d\Omega = 2\pi \sin\Theta d\Theta = 4\pi \sin^2 \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2} d\Theta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I_0} \frac{dN}{d\Omega} = \left(\frac{z_1 z_2}{4E} \right)^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}$$

$$= 0.129 \left(\frac{z_1 z_2}{E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} \left[\frac{\text{fm}^2}{\text{sr}} \right]$$

$$= 1.29 \dots \left[\frac{\text{mb}}{\text{sr}} \right]$$



Ausgangsgleichung

$$d\vec{p} = \vec{K} dt$$

$$\int d\vec{p} = \vec{q} = \int_0^{\infty} \vec{K} dt$$

$$\text{Richtung}(\vec{q}) = \text{Richtung}(\vec{K})$$

$$|\vec{q}| = |\vec{p} - \vec{p}'| = \sqrt{(\vec{p} - \vec{p}')^2}$$

$$= \sqrt{p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \Theta}$$

Näherung : $\frac{p^2}{2m} = \frac{p'^2}{2m} \quad \rangle \quad p^2 = p'^2$

elastische Streuung ohne Energietransfer
(d.h.: $M_{\text{Target}} \gg m_{\text{proj}}$)

$$= \sqrt{2p^2 - 2p^2 \cos \Theta}$$

$$= \sqrt{2p^2 (1 - \cos \Theta)} = \sqrt{4p^2 \left(\frac{1 - \cos \Theta}{2}\right)}$$

$$|\vec{q}| = 2p \sin \frac{\Theta}{2} \quad \textcircled{\text{I}}$$

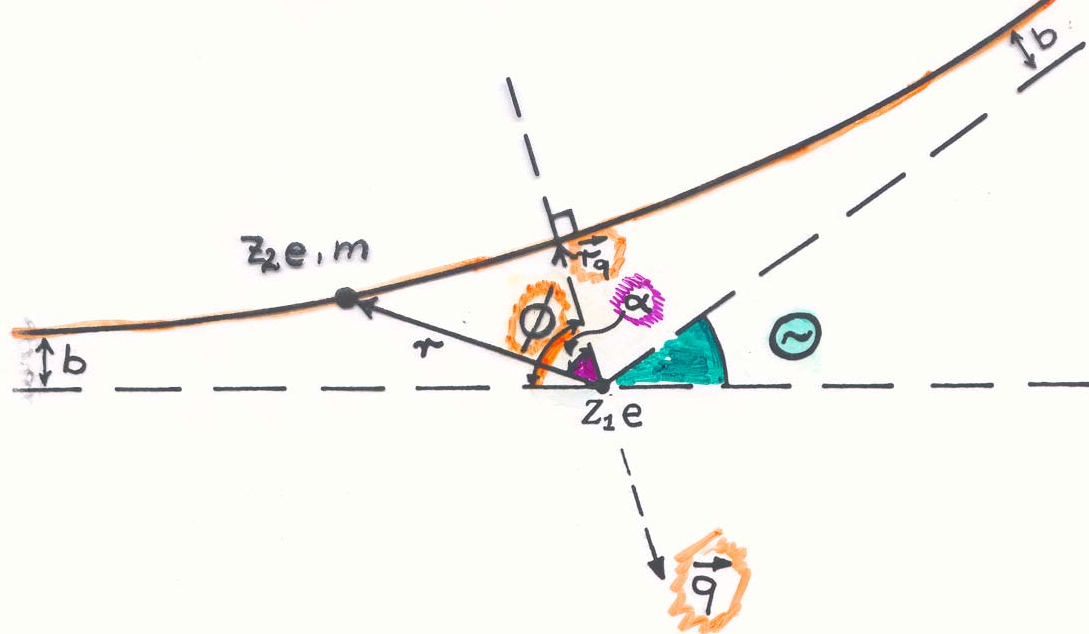
$$\vec{K} = -\nabla V = -\nabla \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \right)$$

$$= -g \nabla \frac{1}{r}$$

$$\vec{K} = g \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \textcircled{\text{II}}$$

$\textcircled{\text{I}} + \textcircled{\text{II}} \rangle$

$$2p \sin \frac{\Theta}{2} = g \int_0^{\infty} \frac{1}{r^2} \left| \frac{\vec{r}_q}{r} \right| dt \quad \textcircled{\text{III}}$$



Drehimpuls ist Erhaltungsgröße

$$L = p \cdot b = m v b = m r^2 \frac{d\alpha}{dt} \quad \text{(N)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{m}{L} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

aus (iii) $2 m v \sin \frac{\Theta}{2} = g \cdot \frac{m}{L} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{dt} \left| \frac{\vec{r}_g}{r} \right| dt$

$$= 2 g \frac{m}{L} \int_0^{\Phi} \left| \frac{\vec{r}_g}{r} \right| d\alpha$$

$$\left| \frac{\vec{r}_g}{r} \right| = \cos \alpha$$

$$2 \Phi + \Theta = 180$$

$$\Phi = 90 - \frac{\Theta}{2}$$

$$= 2 g \cdot \frac{m}{L} \int_0^{90 - \frac{\Theta}{2}} \cos \alpha d\alpha$$

$$\begin{aligned}
 2m v \sin \frac{\Theta}{2} &= 2g \frac{m}{L} \int_0^{90 - \frac{\Theta}{2}} \cos \alpha \, d\alpha \\
 &= 2g \frac{m}{L} \sin \left(90 - \frac{\Theta}{2} \right) \\
 &= 2g \frac{m}{L} \cos \frac{\Theta}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos \frac{\Theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}} &= \cot \frac{\Theta}{2} = \frac{2m v L}{2g m} = \\
 &= \frac{v L}{g} = \frac{m v^2 b}{z_1 z_2 e^2} \frac{4\pi \epsilon_0}{2E}
 \end{aligned}$$

$$\cot \frac{\Theta}{2} = 2E b \frac{4\pi \epsilon_0}{z_1 z_2 e^2}$$

$$b = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}$$

$$\begin{aligned}
 dN &= I_0 \cdot 2\pi b db \\
 &= I_0 \cdot 2\pi \left(\frac{z_1 z_2}{2E} \right)^2 \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\Theta}{2}}{\sin^3 \frac{\Theta}{2}} d\Theta
 \end{aligned}$$

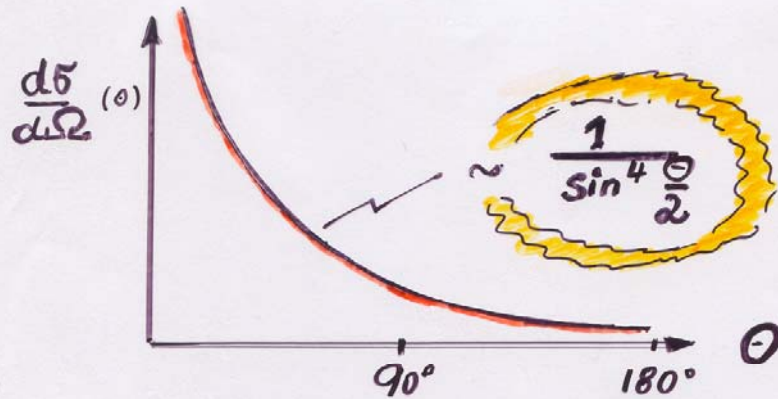
$$d\Omega = 2\pi \sin \Theta \, d\Theta = 4\pi \sin^2 \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \, d\Theta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I_0} \frac{dN}{d\Omega} = \left(\frac{z_1 z_2}{4E} \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}$$



$$= 0.129 \left(\frac{z_1 z_2}{E} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\Theta}{2} \text{ [fm}^2\text{]}$$

Rutherford - Streuquerschnitt

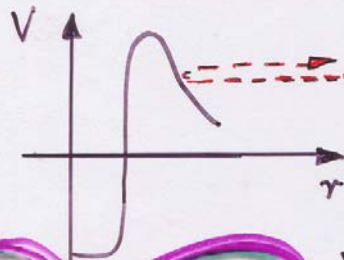


Abweichungen vom "Rutherford"-Verhalten in der **elastischen!** Streuung deuten auf Effekte der Kernkräfte hin

daher oft: $\frac{d\sigma}{d\sigma_R}$ - Auftragung

Rutherford-Versuch (1913)

7.68 MeV α -Teilchen aus Uran-Zerfallskette auf Gold:



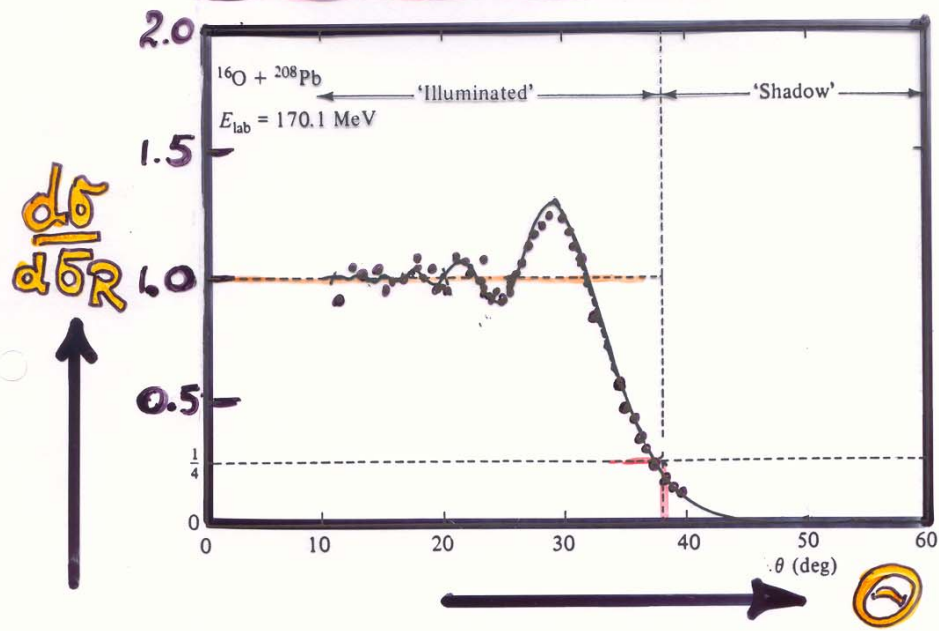
minimalster Abstand:

$$E_0 = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0} = 1.44 \frac{z_1 z_2}{r_0} \left[\frac{\text{MeVfm}}{\text{fm}} \right]$$

$$\begin{aligned} r_0 &= 1.44 \frac{z_1 z_2}{E_0} \\ &= 1.44 \cdot \frac{2 \cdot 79}{7.68} \sim 30 \text{ fm} \end{aligned}$$

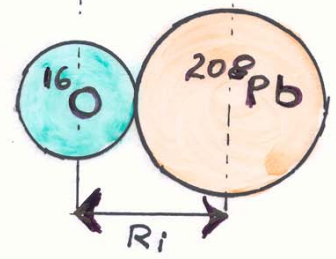
Kern $\ll 30 \text{ fm}$

170 MeV $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$



berechne Bahnparameter b für $\Theta \approx 35^\circ$
 Lösung: $b \sim 8.8 \text{ fm}$

$$R_i = 1.24 \cdot (16^{1/3} + 208^{1/3}) \approx 10.5 \text{ fm}$$



$$R(^{208}\text{Pb-Atom}) \sim 10 \text{ \AA} = 10^6 \text{ fm}$$

Rutherford-Erkenntnis Revolution

Beispiel

$$65 \text{ g Cu} \hat{=} 1 \text{ mol} \hat{=} 6.02 \cdot 10^{23} \text{ Teilchen}$$

$$\rho(\text{Cu}) \sim 8.5 \text{ g/cm}^3$$

$$\rangle 65 \text{ g Cu} \hat{=} 7.5 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ Cu-Atom} = \frac{7.5}{6.02 \cdot 10^{23}} \text{ cm}^3$$

$$\approx (2.3 \text{ \AA})^3$$

$$= (2.3 \cdot 10^5 \text{ fm})^3$$



Beispiel Rutherfordstreuung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{z_1 z_2}{4E} \right)^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}$$

\uparrow
 $= 1.44 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$

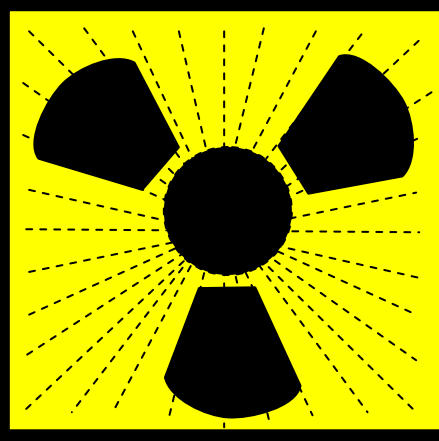
Coulombstreuung (Rutherfordstreuung)
ist elektromagnetischer Prozeß



damit:

Reichweite der Kernkräfte
Kern dimensionen
bestimmbar





Radioaktiver Zerfall

- ▶ Ableitung des Zerfallsgesetzes
- ▶ Anwendung - Datierungstechniken
- ▶ Versuch einer Einordnung verschiedener Lebensdauern

Beispiel α - Zerfall

Wie kann man verstehen:

α - Zerfall: 10^{-6} sec $\sim 10^{15}$ a

(β - Zerfall: 10^{-6} sec $\sim 10^{25}$ a)

Definition:

$$\text{Aktivität} = \frac{\text{Zahl der Zerfälle}}{\text{Zeit}}$$

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\frac{dN}{dt}$$

da Aktivität abnimmt

$$\Delta N = N(t) - N(t + \Delta t)$$

! Zahl der noch nicht zerfallenen Teilchen

Vorsicht:

Unter ΔN verstehen wir nur durch **Zerfall** hervorgerufene **Teilchenzahländerung**

Einheiten: 1 **Bequerel** [Bq] = 1 Zerfall / sec

1 **Curie** [Ci] = $\frac{3,7 \cdot 10^{10} \text{ Zerfälle}}{\text{sec}}$

$\hat{=}$ 1 g Radium

im Gleichgewicht mit allen Tochterzerfällen

einige Größenordnungen

- radioaktive Quellen: $\mu Ci - m Ci$
- α -Aktivität eines „smoke detectors“: $\sim 1 \mu Ci$ (Am)
- Reaktor: $MCi - GCi$

Quantitative Beziehungen: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N + P(t)$

$$\gamma \frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad \curvearrowright \quad \int \dots$$

$$\ln N = -\lambda t + \ln N_0$$

zur Zeit $t=0$

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

- Bedeutung:
- N_0 -Zahl der zur Zeit $t=0$ vorhandenen Teilchen
 - $N(t)$ -Zahl der zur Zeit $t>0$ noch nicht zerfallenen Teilchen
 - λ -Zerfallskonstante

Halbwertszeit & mittlere Lebensdauer

HWZ

MLD

HWZ : $t_{1/2}$

Zeit, nach der die Hälfte der ursprünglichen Anzahl von Teilchen zerfallen ist.

$$\gamma \frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\longrightarrow \gamma \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 = -\lambda t_{1/2}$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0,69 \frac{1}{\lambda}$$

MLD : τ

$$\tau := \frac{1}{\lambda} \approx 1,44 t_{1/2}$$

$$10 \text{ HWZ} \hat{=} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx \frac{1}{1000} !$$

Der α -Zerfall ($\alpha = {}^4\text{He}$)

α -Zerfall möglich wenn:

$$E_\alpha = M(A, Z) - M(A-4, Z-2) - M_\alpha > 0$$

$$E_\alpha > 0 \text{ für } A \geq 150$$

1911
Geiger - Nuttall

Nuklid	$T_{1/2}$	E_α [MeV]
${}^{212}\text{Po}$	0,3 μs	8,78
${}^{256}\text{No}$	3,2s	8,55
${}^{240}\text{Cm}$	27d	6,40
${}^{242}\text{Cm}$	162,8d	6,20
${}^{238}\text{Pu}$	87,7Y	5,59
${}^{238}\text{U}$	$4,47 \cdot 10^9 \text{Y}$	4,27
${}^{190}\text{Pt}$	$6 \cdot 10^{11} \text{Y}$	3,24
${}^{186}\text{Os}$	$2 \cdot 10^{15} \text{Y}$	2,82
${}^{148}\text{Gd}$	98Y	3,27
${}^{144}\text{Nd}$	$2,2 \cdot 10^{15} \text{Y}$	1,90

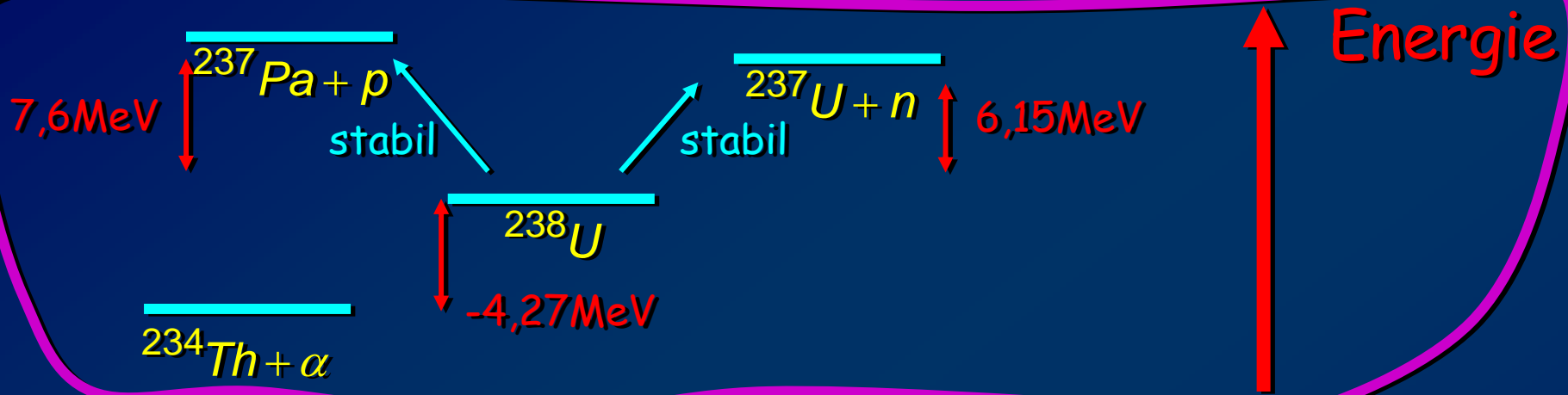


$T_{1/2}$ hängt exponentiell von E_α ab

$$T_{1/2} \sim e^{-f(1/E)} = e^{-1/\sqrt{E_\alpha}}$$

$T_{1/2}$ hängt von **A** bzw. **Z** ab

naive Vorstellung des α -Zerfalls



aber: ^{238}U ist ein 238-Nukleonen-System und kein α -Teilchen-System

- sollte sich aber (statistisch) ein α -Teilchen kurzfristig im Kern bilden, dann ist der Kern instabil gegen α -Zerfall.

dh.:

Übergangswahrscheinlichkeit \sim -Bildungswahrscheinlichkeit

$$|M(A \rightarrow A' + \alpha)|^2 \sim \lambda_\alpha$$

oder:

$$\lambda \sim \lambda_\alpha$$

naiver Ansatz:

$$\lambda_\alpha = \text{const}(A, E\dots)$$

Bedingt durch die hohe Bindungsenergie des α wird dann ein „quasistationärer“

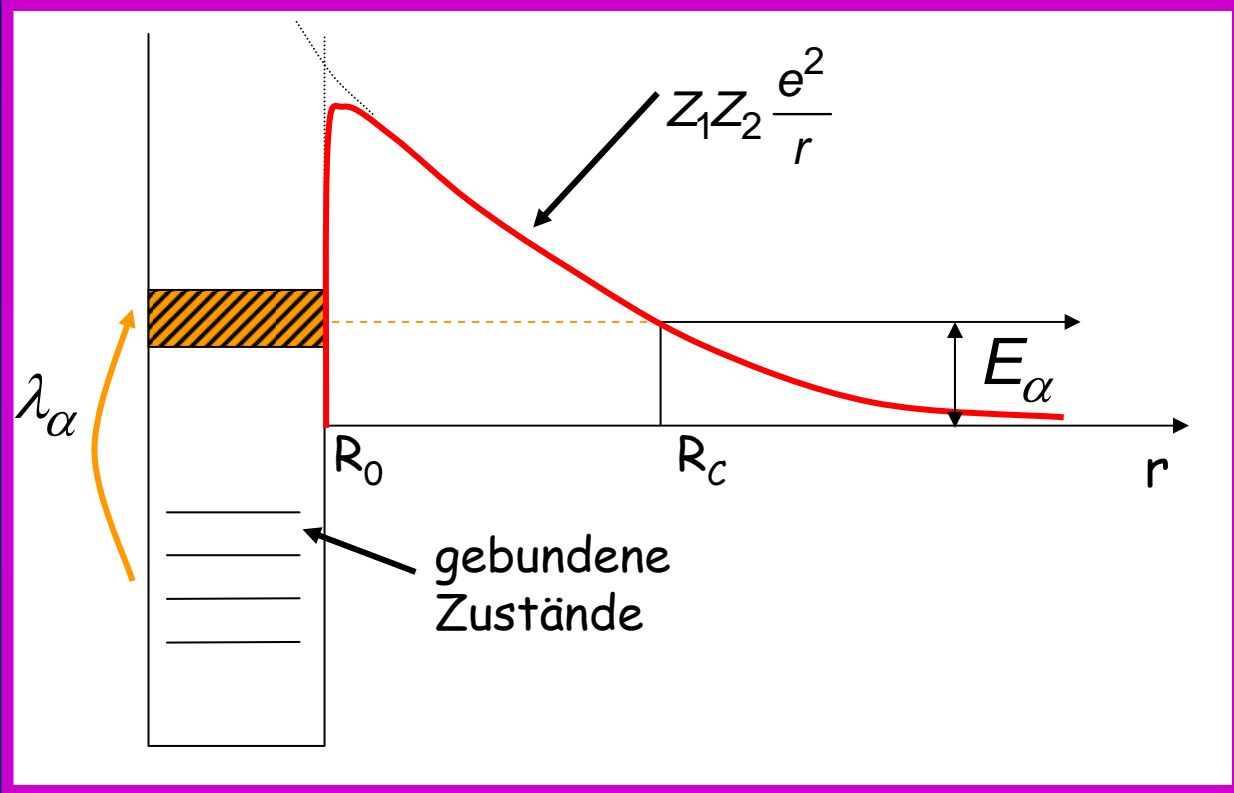
$\alpha + {}^{234}\text{Th}$ (Beispiel) gebildet.

$$\lambda = \lambda_\alpha \cdot T_\alpha$$

λ_α auch „reduzierte Zerfallskonstante“

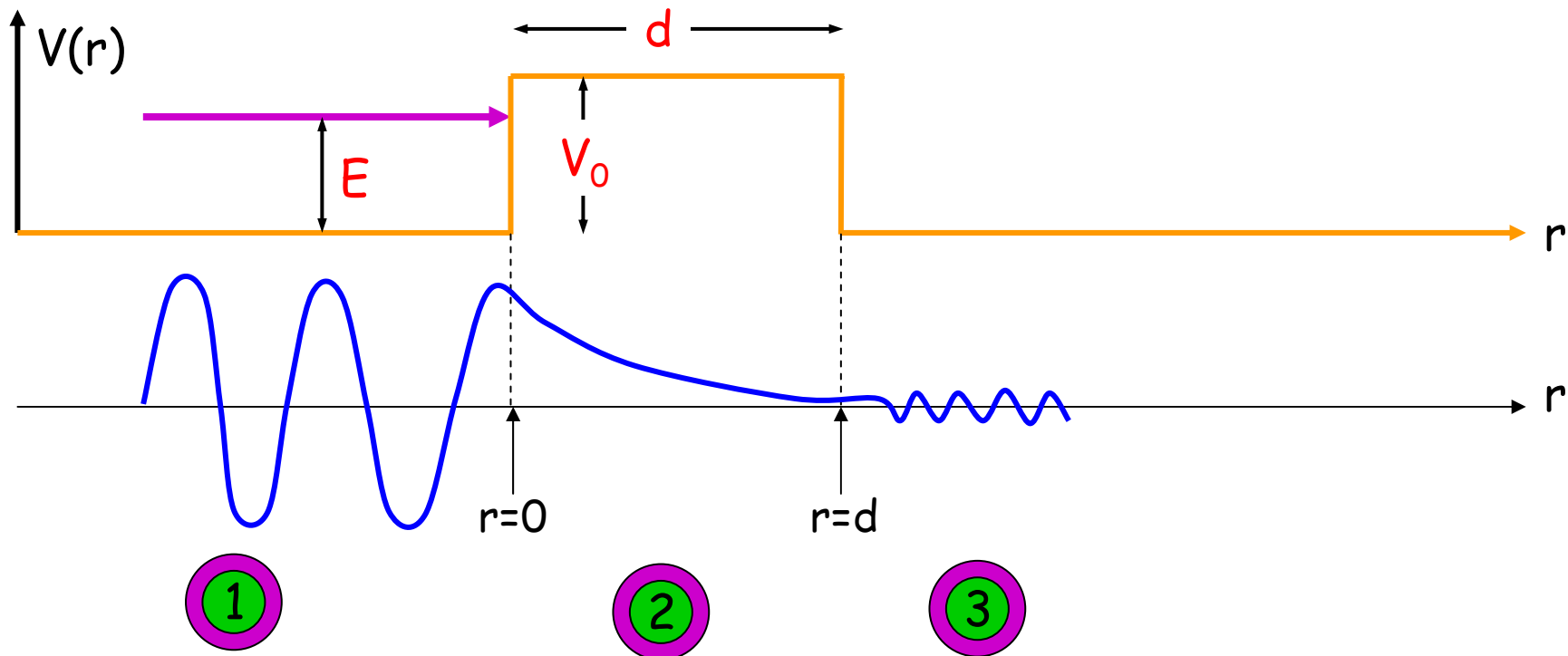
T_α -Tunnelwahrscheinlichkeit
 Transmissionswahrscheinlichkeit
 Transmissionskoeffizient

Potenzialverhältnisse beim α -Zerfall



! Die Durchtunnelung ist ein rein quantenmechanisches Phänomen, bedingt durch die Wellennatur des Teilchens.

Berechnung des Transmissionskoeffizienten



$$H u = E u \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + V(r) u = E u \longrightarrow \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] u = 0$$

$$u'' + k^2 u = 0$$

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V)}$$

(10)

①

$$u_1 = \alpha_1 e^{ik_1 r} + \beta_1 e^{-ik_1 r}$$

$$= u_e + u_R$$

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

②

$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E-V)} = \frac{i}{\hbar} \sqrt{2m(V-E)}$$

$$= ik_2'$$

$$u_2 = \alpha_2 e^{-k_2' r} + \beta_2 e^{k_2' r}$$

③

$$u_3 = \alpha_3 e^{ik_3 r}$$

$k_3 = k_1$
keine Reflektion

$$u_3 = \alpha_3 e^{ik_1 r}$$

Bedingungen:

a) $u_1 = u_2$ $u_1' = u_2'$ $r=0$
 b) $u_2 = u_3$ $u_2' = u_3'$ $r=d$

$\uparrow \hat{=} u''$ endlich

$$T = \frac{|u_3|^2}{|u_e|^2} = \frac{|\alpha_3|^2}{|\alpha_1|^2}$$

nach einiger Rechnung

nach einiger Rechnung

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{V_0^2 - (2E - V_0)^2} \sinh^2 k_2' d}$$

$k_2' d \gg 1$ oder $d \gg \frac{1}{k_2'} = \hat{\lambda}_2$ ($\hat{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi}$ de Broglie Wellenlänge)
für $E^* = V_0 - E$

$$\begin{aligned} \text{für } \sinh^2 x &= \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x}) - \frac{1}{2} \\ x \gg 1 &\sim \frac{1}{4} e^{2x} \end{aligned}$$

$$T = 4 \frac{V_0^2 - (2E - V_0)^2}{V_0^2} e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} d}$$

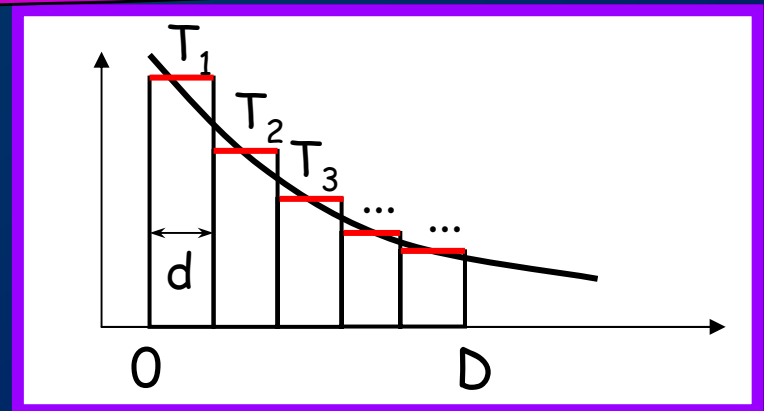
$$T \sim e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} d}$$

für beliebige Potentialform:

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot \dots$$

$$= e^{-\frac{2}{\hbar} \sum \sqrt{2m(V_i - E)} d}$$

$$= e^{-\frac{2}{\hbar} \int_0^D \sqrt{2m(V(r) - E)} dr}$$

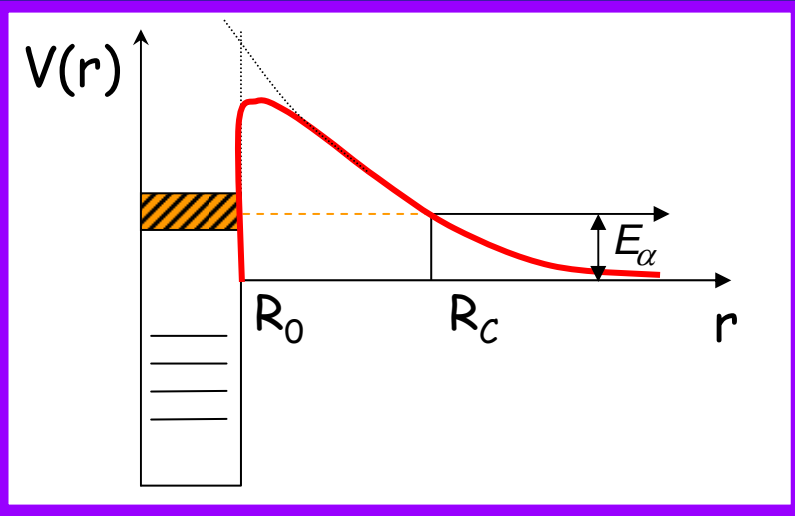


für den α - Zerfall

$$T_\alpha \sim e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{R_C} \sqrt{2m \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E_\alpha \right)} dr}$$

$$\sim e^{-G} = e^{-2\gamma}$$

$\left. \begin{matrix} \gamma \\ G \end{matrix} \right\}$ Gamov - Faktor



wichtig

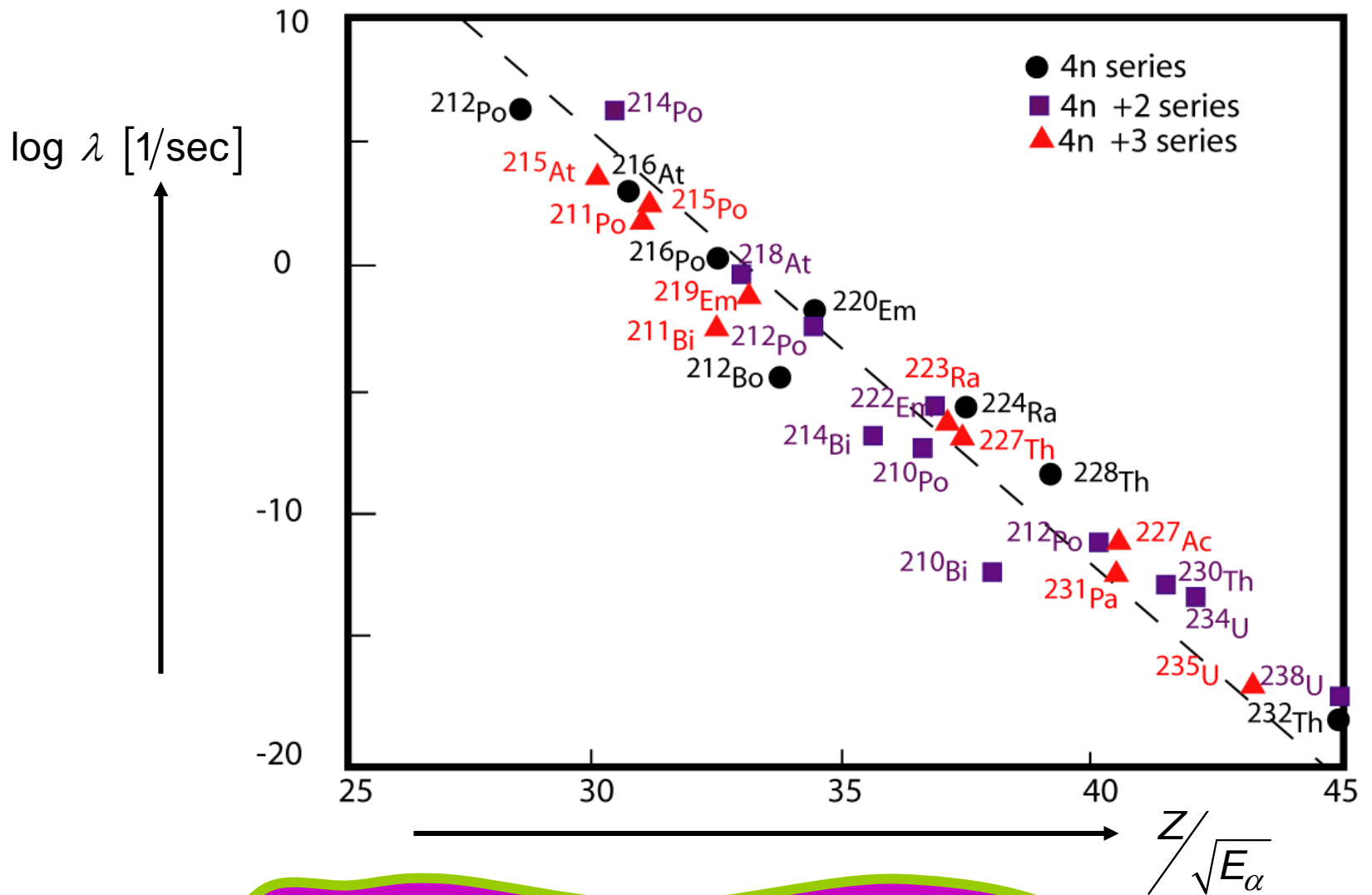
$$G = \frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{R_C} \sqrt{2m \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E_\alpha \right)} dr = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m Z_1 Z_2 e^2}{E_\alpha 4\pi\epsilon_0}} \cdot \gamma(x)$$

$$\gamma(x) = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}$$

$$x = R_0/R_C = E_\alpha/V_0$$

Erinnere $\lambda = \lambda_\alpha \cdot T = \lambda_\alpha e^{-G}$

$$\log t_{1/2} \sim \log \frac{1}{\lambda} \sim G \sim \frac{Z_2}{\sqrt{E_\alpha}}$$



Geiger-Nuttallsche Regel

Wiederholung

1

Radioaktiver Zerfall

$$A = -\lambda N$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Basis für
Datierungstechniken

2

Halbwertszeit / mittlere Lebensdauer

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

3

^{14}C -Datierung

^{14}C -Produktion: \longrightarrow Höhenstrahlung

^{14}C -Konzentration: $\sim 2 \cdot 10^{-12} \text{ g/g}$

Nachtrag: $A_{(\text{Mensch})}^{14\text{C}} = 4000 \text{ Bq} !$

Vorlesung (Kernphysikalische Methoden)

4 α - Zerfall

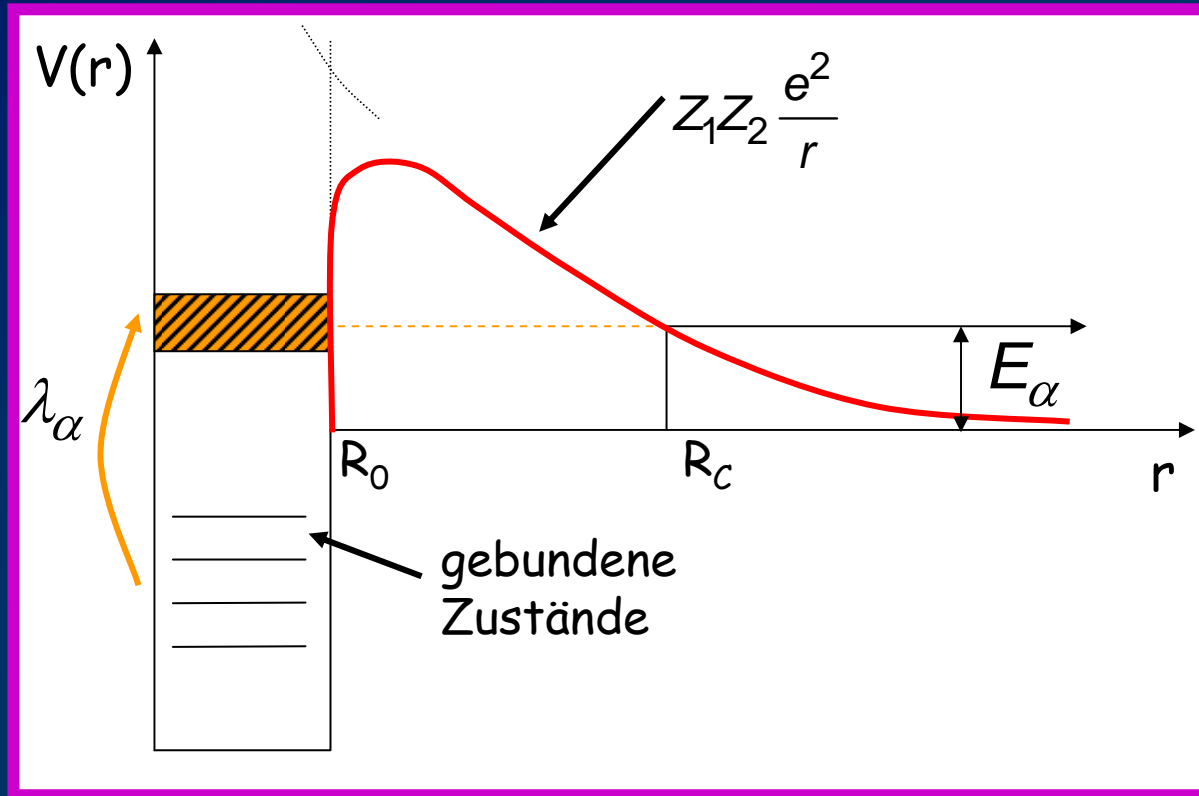
$$\lambda = \lambda_\alpha \cdot T_\alpha$$

verschiedene γ 's

$$T_\alpha \sim e^{-G} = e^{-2\gamma}$$

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \frac{Z_\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \gamma(x) \frac{Z_2}{\sqrt{E_\alpha}} \quad x = \frac{R_0}{R_C} = \frac{E_\alpha}{V_0}$$

$$\log t_{1/2} \sim G \sim \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}}$$



5

Noch ein Nachtrag

Energiebeziehung beim α -Zerfall

$$E = M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M_{\alpha} > 0$$

$A \sim 150$ (BW-Formel)

^{144}Nd leichtester α -Emitter

neuerdings auch entdeckt:

$$E = M(A, Z) - M(A - 14, Z - 6) - M(^{14}\text{C}) > 0$$

$$^{223}\text{Ra}: \frac{R(^{14}\text{C})}{R(\alpha)} \sim 5 \cdot 10^{-10} \quad E_{^{14}\text{C}} \approx 30 \text{ MeV}$$