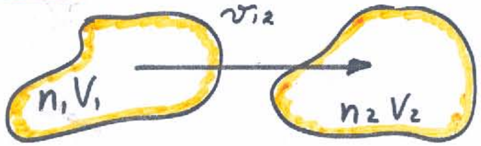
S-Faktor
und
Niederenergie-Astrophysik

ABER

R

Die Protonen haben in der Sonne eine Geschwindigkeitsverteilung

Reaktionsrate:



$$R = n_1 \cdot n_2 \cdot \sigma \cdot v_{12} \qquad \left[\frac{\text{Ereignisse}}{\text{Vol} \cdot \text{sec}}\right]$$

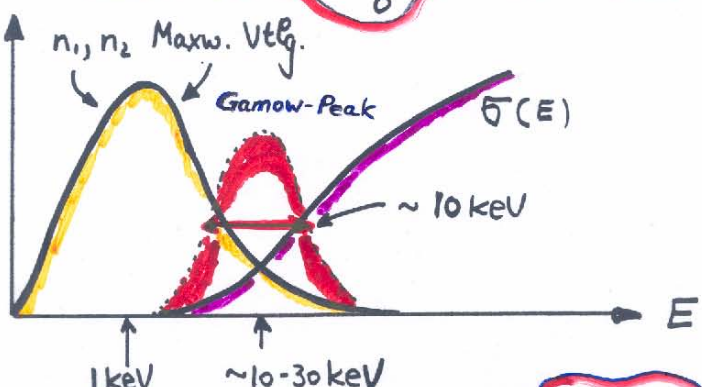
n_1 – Teilchen der Sorte 1 / Vol.

n_2 – Teilchen der Sorte 2 / Vol.

v_{12} – Relativgeschwindigkeit n_1 gegen n_2

Unter Berücksichtigung von Verteilungen

$$R = n_1 \cdot n_2 \int_0^\infty \sigma(E)\, f(E)\, dE$$



Folge: Erhöhung des abgeschätzten WQ's um ~ 10^4

Wirkungsquerschnitt

klassisch: $\sigma = \pi (r_p + r_T)^2$

quant. mech. (für E klein) $\sigma = \pi \lambda\!\!\!^{-2} = \frac{\pi}{k^2} \sim \frac{1}{E}$

Form der Funktion f(E)

Maxwell-Boltzmann $\sim \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$ **1**

Gamow-Faktor $\sim \exp(-2\gamma)$ **2**

Abhängigkeit des WQ Bei kleinen Energien $S_0 \rightarrow$ nukl. S-Faktor $\sigma(E) = S_0 \frac{1}{E}$ **3**

$$\langle \sigma(E) v \rangle = \int_0^\infty (1) \times (2) \times (3)\, dE$$

für den α -Zerfall

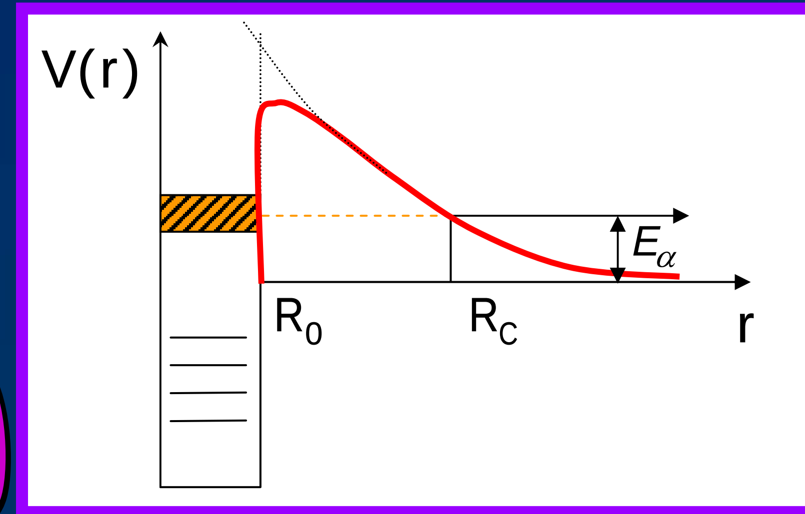
R

$$T_\alpha \sim e^{-\frac{2}{\hbar}\int_{R_0}^{R_C}\sqrt{2m\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}-E_\alpha\right)}dr}$$

$$\sim e^{-G} = e^{-2\gamma}$$

$\left.\begin{matrix}\gamma \\ G\end{matrix}\right\}$ *Gamov – Faktor*

wichtig



$$G = \frac{2}{\hbar}\int_{R_0}^{R_C}\sqrt{2m\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}-E_\alpha\right)}dr = \frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E_\alpha}}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\gamma(x)$$

$$\gamma(x) = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}$$

$$x = R_0/R_C = E_\alpha/V_0$$

Erinnere $\lambda = \lambda_\alpha \cdot T = \lambda_\alpha e^{-G}$

$$\log t_{1/2} \sim \log\frac{1}{\lambda} \sim G \sim \frac{Z_2}{\sqrt{E_\alpha}}$$

R

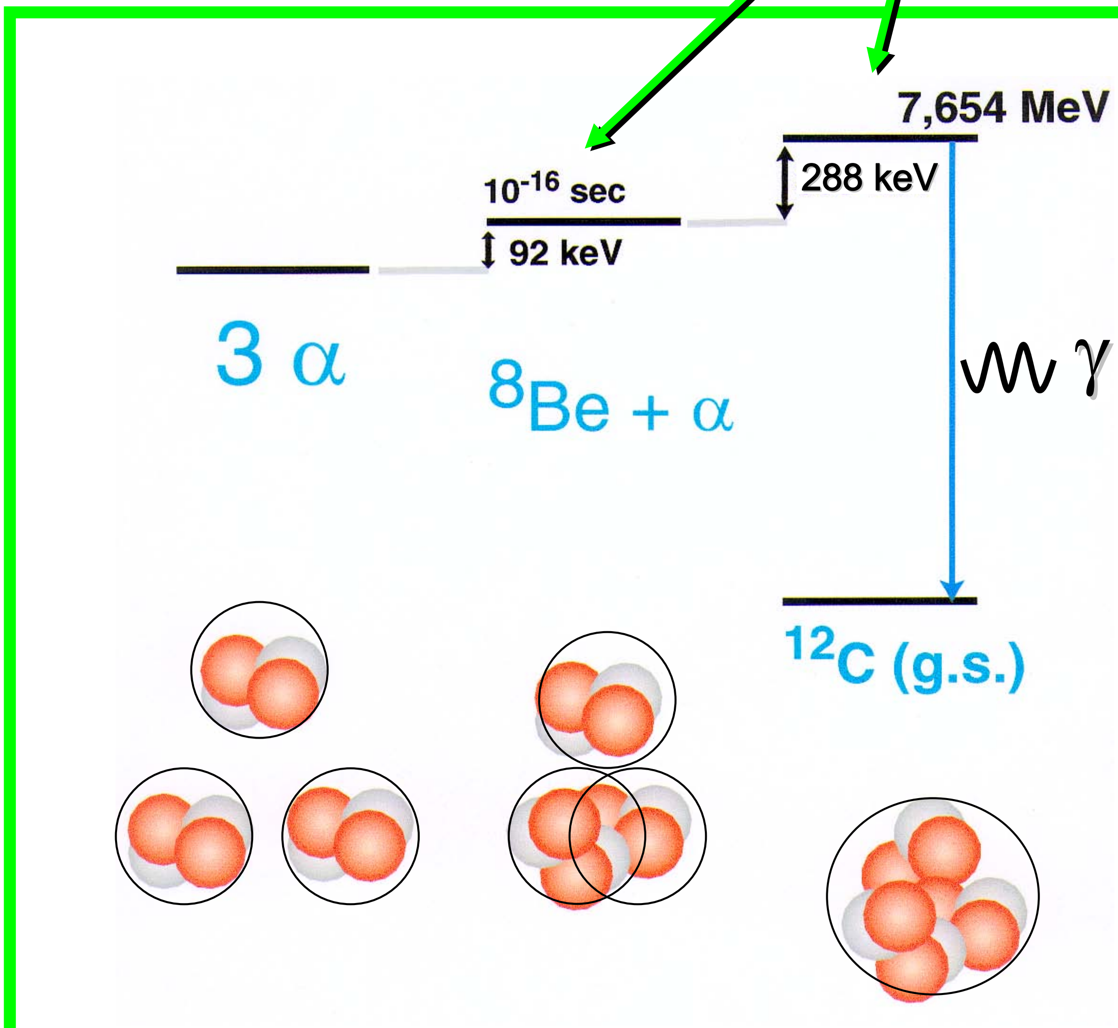
Triple - α - Fusion

3 a → ^{12}C + 7.275 MeV

Resonanter Zustand

Ist der mysteriöseste und faszinierendste Prozess in der gesamten Physik!!

Mit zwei „präzise getunten“ Resonanzen gelingt der Sprung über Masse-5 und Masse-8



Gamow-Faktor & S-Faktor

bitte nachrechnen !!

- für niedrige Energien E << E_C kann T-Koeffizient genähert werden:

$$T = \exp(-2\pi\eta)$$

Gamow-Faktor

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar v}$$

Sommerfeld-Parameter η

- Wirkungsquerschnitt proportional zur Tunnelwahrscheinlichkeit

$$\sigma(E) \propto \exp(-2\pi\eta)$$

aber auch (s.o.)

$$\sigma(E) \propto \pi\lambda\!\!\!^{-2} \propto \frac{1}{E}$$

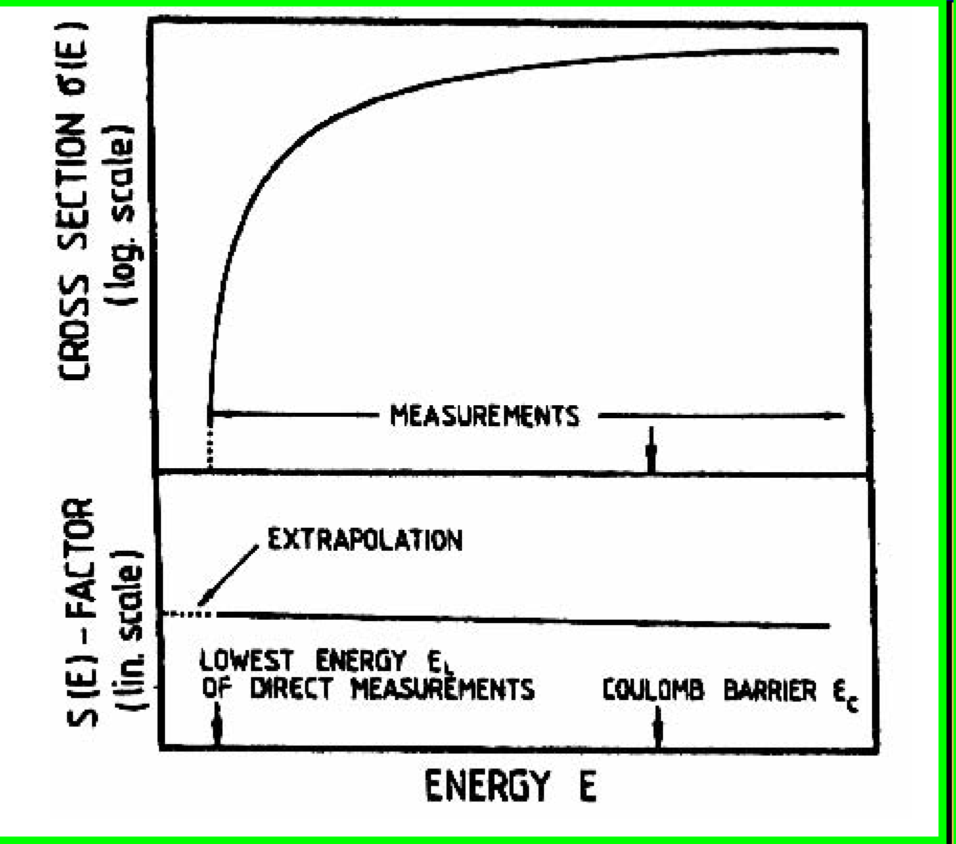
- zusammen:

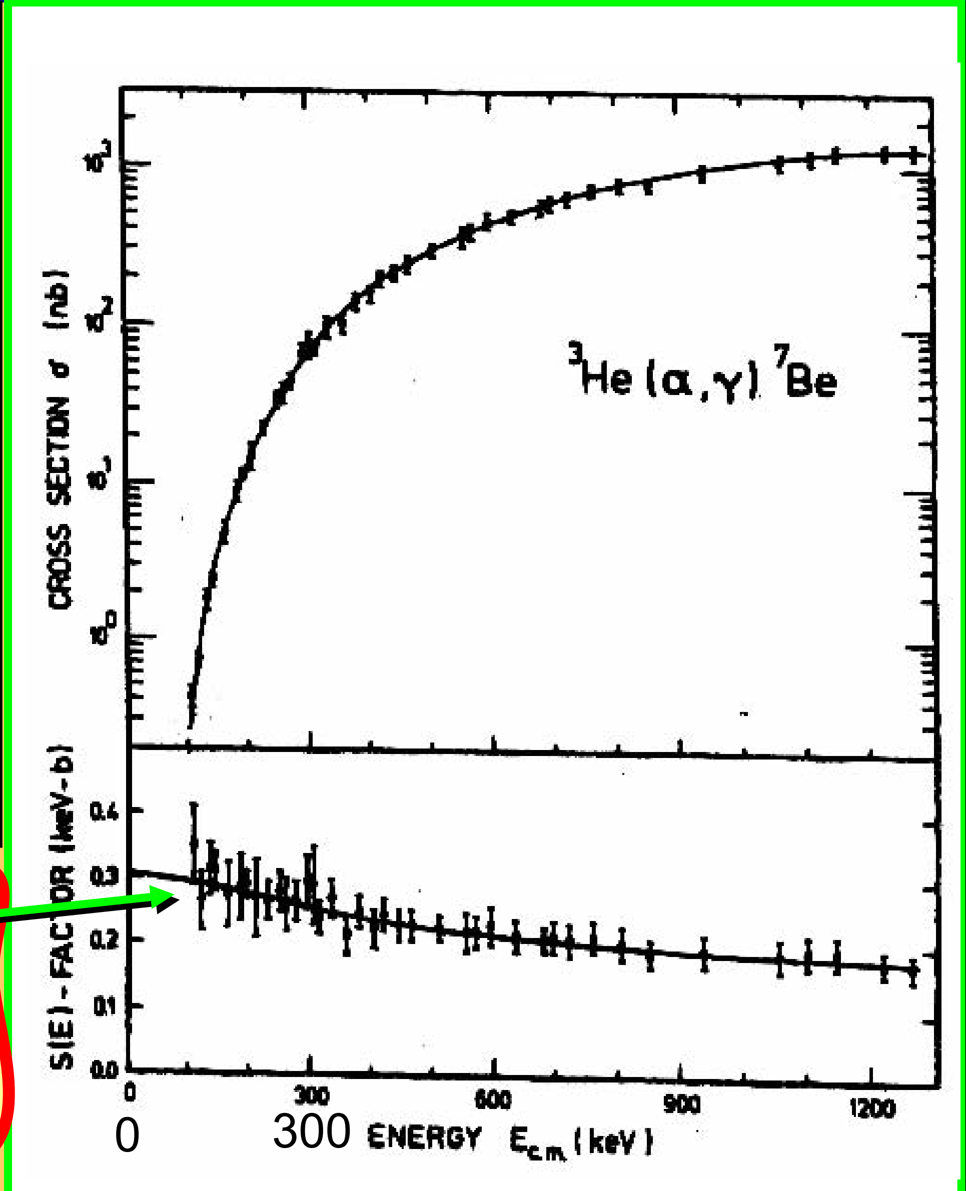
$$\sigma(E) = \frac{1}{E}\exp(-2\pi\eta)\cdot S(E)$$

nuklearer oder astrophysikalischer S-Faktor

- S-Faktor enthält die übrigen reinen Kern-Effekte
  - für nicht-resonante Reaktionen: S-Faktor langsam veränderliche Funktion der Energie, im Gegensatz zu WQ
  - daher S-Faktor viel besser geeignet für Extrapolation von gemessenen WQ in den astrophysikalischen Energiebereich

S-Faktor





ansteigend, da
1) Näherungsformel
2) elektronisches Screening

Der Gamow Peak

- **Normierte Reaktionsrate mit dieser Näherung:**

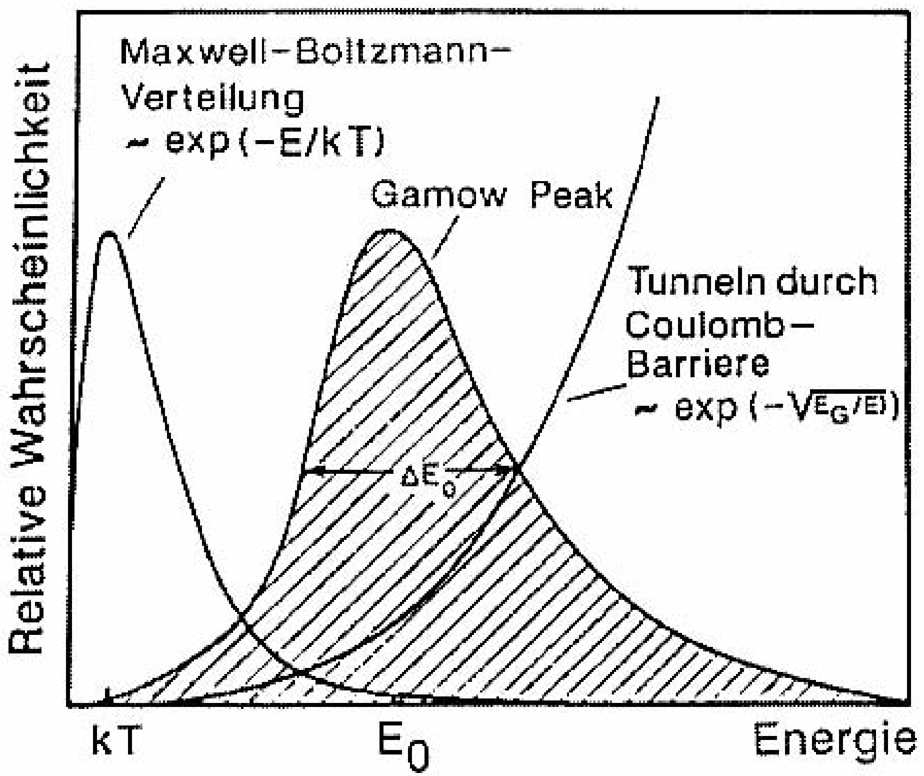
$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} S(E_0) \int_0^\infty \exp\left[-\frac{E}{kT} - \frac{b}{E^{1/2}}\right] dE$$

$$b = (2\mu)^{1/2} \pi e^2 Z_1 Z_2 / \hbar$$

- **b^2: Gamow-Energie E_G**

- **$S(E) = S(E_0) = \text{const}$**

Gamow-Peak



Der Gamow Peak

bitte nachrechnen !!

- Maximum bei

$$E_0 = \left(\frac{bkT}{2}\right)^{2/3} = 1.22\ (Z_1^2 Z_2^2 \mu T_6^2)^{1/3}\, keV$$

- Beispiel: T_6 = 15 (Sonne) effektive Brennenergie:
  - p + p: E_0 = 5,9 keV (3/2kT = 1,3 keV)
  - p + ^{14}N: E_0 = 26,5 keV
  - ^{16}O + ^{16}O: E_0 = 237 keV
- maximaler Wert des Integranden → Einsetzen von E_0

$$I_{max} = \exp\left(-\frac{3E_0}{kT}\right) = \exp(-\tau)$$

$$\tau = \frac{3E_0}{kT}$$

- Reaktionsrate proportional zur Intensität
  - starke Abhängigkeit von der Coulombbarriere

Problem bei Messung unter Laborbedingungen

- E_0, ist die Brennenergie und liegt i.a. immer noch weit entfernt von Energien, bei denen direkte Messung des WQ oder auch des S-Faktors bei Laborbedingungen möglich ist (WQ zu klein!!)
- Standardlösung: S(E) über weiten Energienereich messen, dann in Niederenergiebereich extrapolieren
- WQ dann erschließbar

$$\boxed{\sigma(E) = \frac{1}{E}\exp(-2\pi\eta)\;\; S(E)}$$

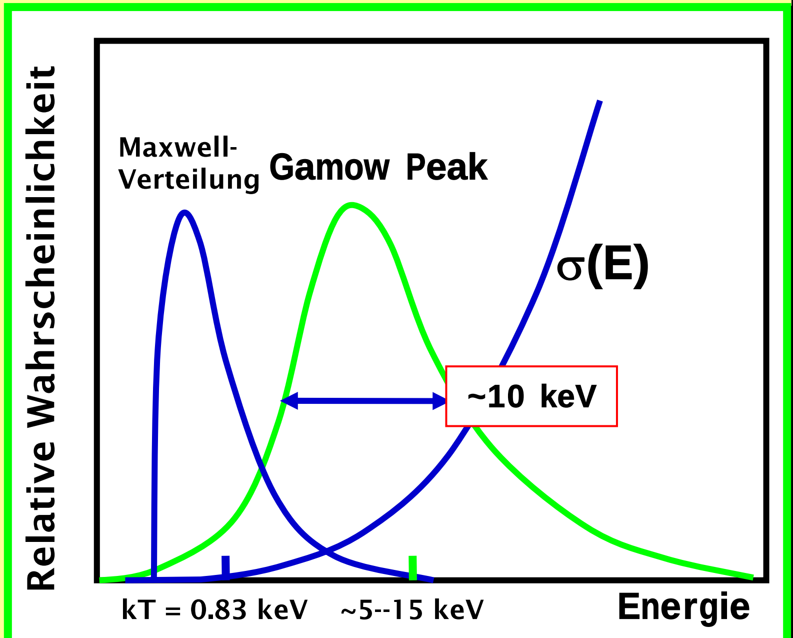
Beispiel: Sonne

- p-p Zyklus: $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu$
- Sonnentemperatur: ca. 15×10^6 K $\longrightarrow$ $kT = 0.83$ keV $= E_P$
- Coulombwall: $E_C \sim 0,5$ MeV
- Typische Werte:
  - für p+p: $\langle \sigma v \rangle \sim 10^{-50}\, m^3 / \sec$
  - Dichte : $\rho_\odot \sim 100\, g / cm^3$
  - Reaktionsrate p+p:

$$R = N^2 \langle \sigma v \rangle \sim 3{,}6 \cdot 10^{13} \frac{1}{m^3 \sec}$$

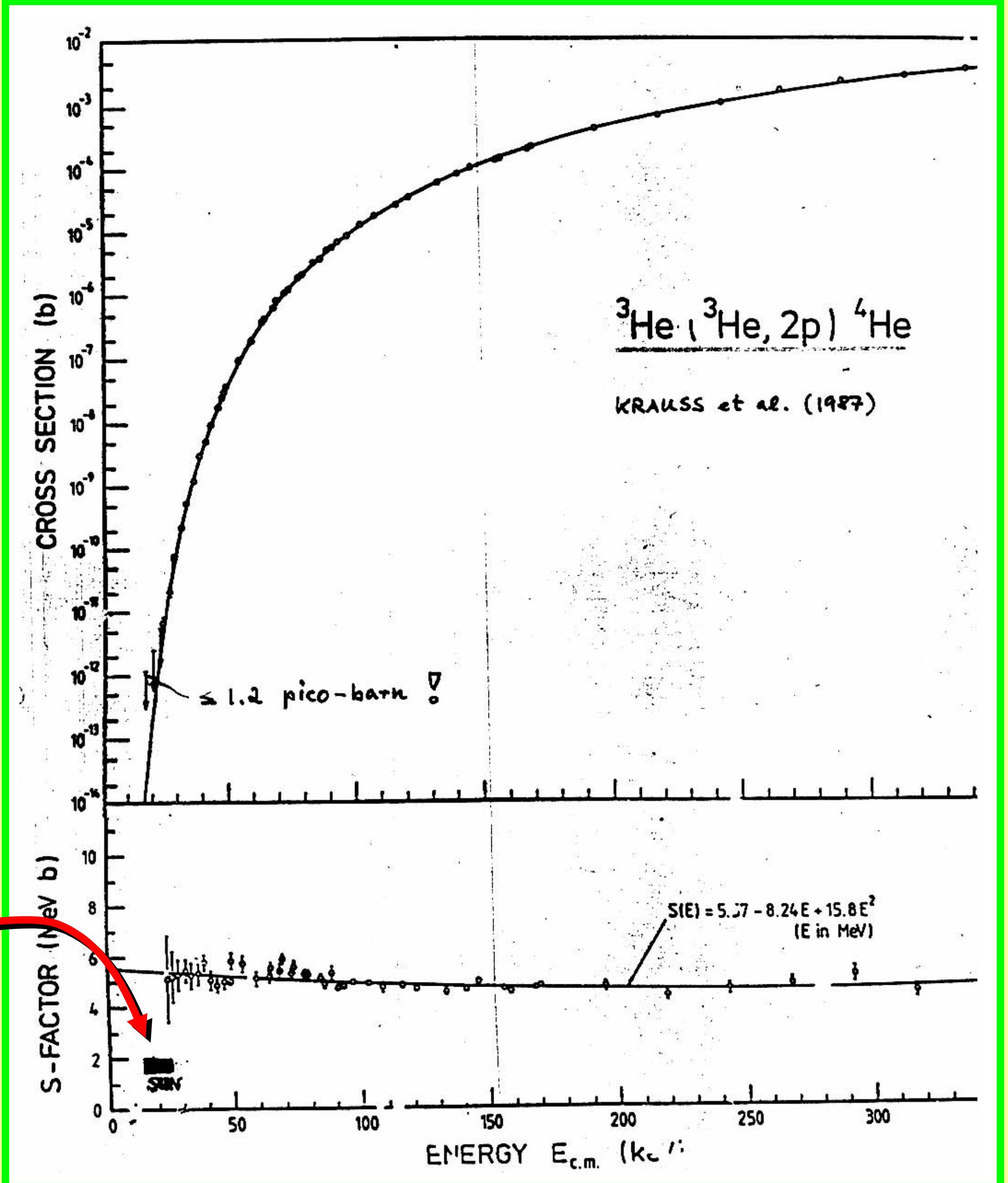
  - Lebenserwartung der Sonne:

$$\sim 10^{10}\, a$$



Reaktionen ohne!! Resonanzen:

relevanter Energie-bereich der Sonne



Einfluss von Resonanzen

- Reaktionen mit Resonanzen bilden einen angeregten Zwischenzustand mit der Energie E_r
- Wellenfunktion hat komplexen Energieeigenwert, da Zustand instabil

$$\Psi(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(E_r + \frac{i\Gamma}{2}\right)t\right]$$

- Zustand zerfällt

$$\left|\Psi(t)\right|^2 = \exp\left(-\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)$$

- Wellenfunktion wird entwickelt nach ebenen Wellen

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(E) \exp\left(\frac{iEt}{\hbar}\right) dE$$

- Amplitude a(E) ist die Fouriertransformation von Ψ(t):

$$a(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) dt$$

Einfluss von Resonanzen

- Einsetzen von $\Psi(t)$ liefert dann:

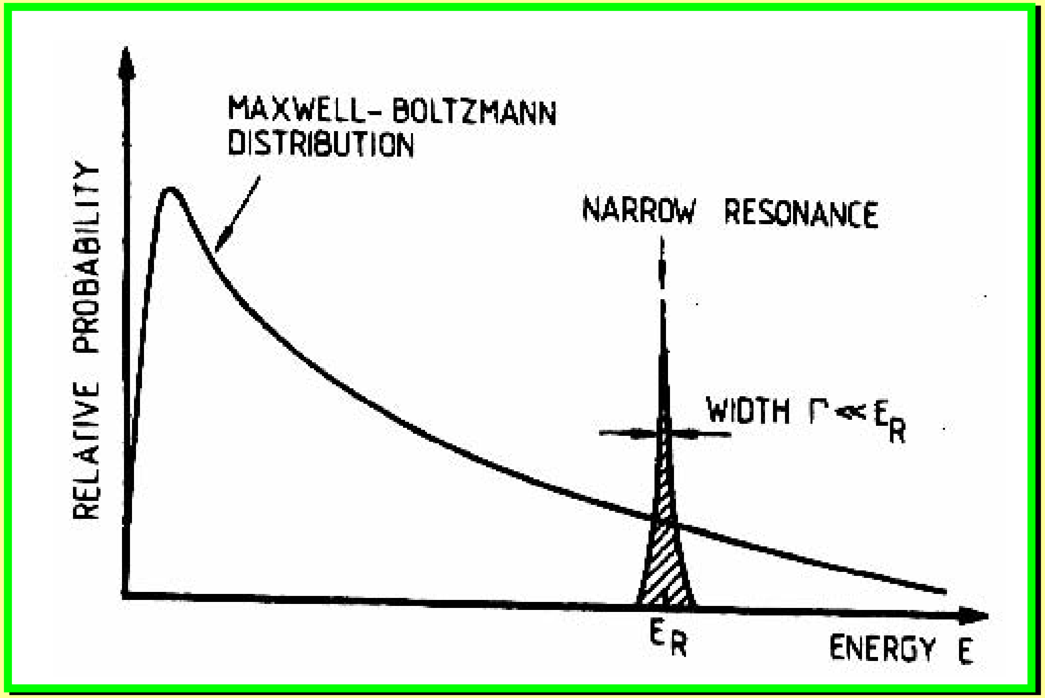
$$|a(E)|^2 \propto \frac{1}{(E_r - E)^2 + \Gamma^2/4}$$

Breit - Wigner Formel

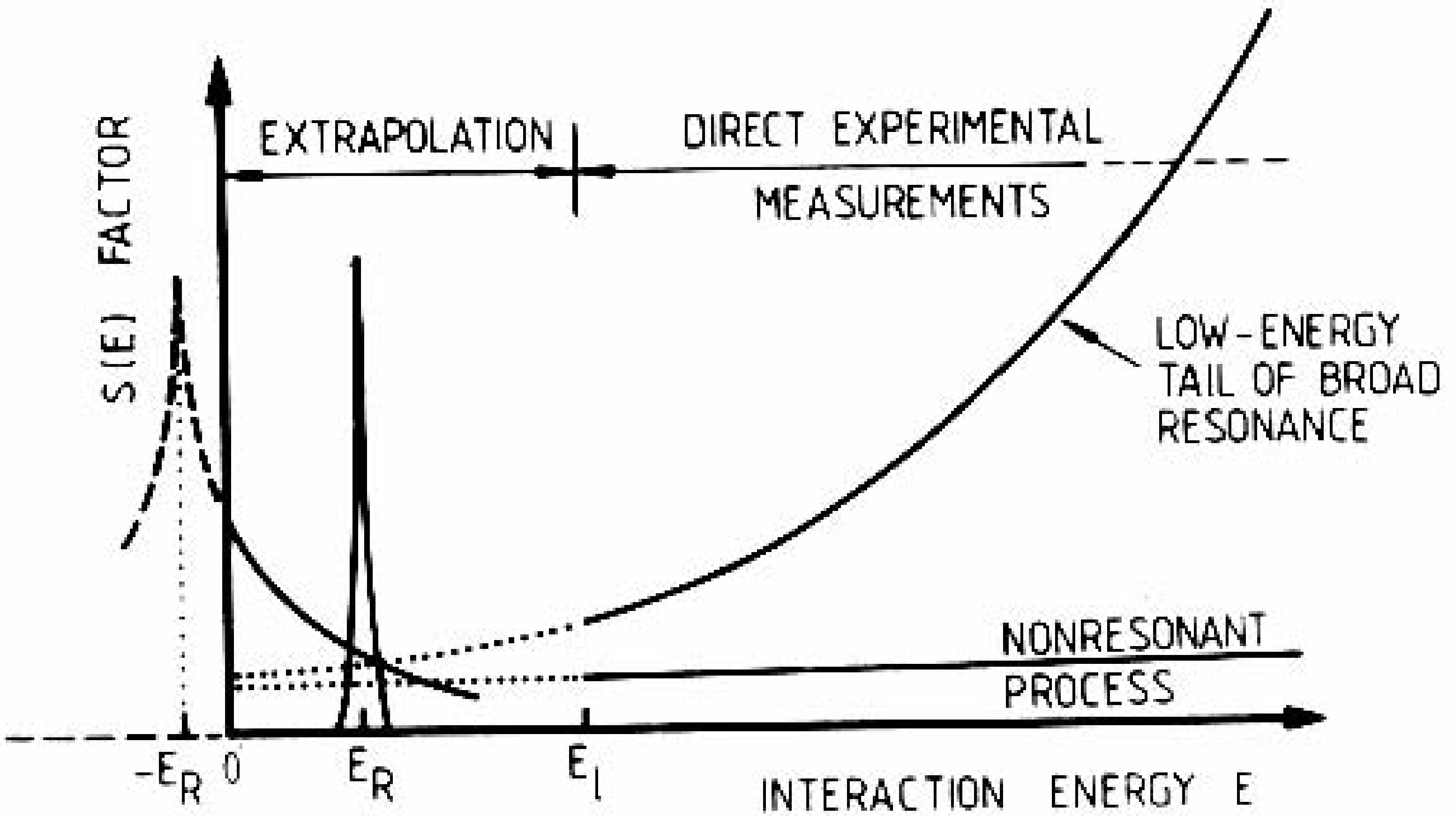
- schmale Resonanzen im WQ ändern die Brenntemperatur massiv

- das Brennen findet bei der Resonanzenergie statt

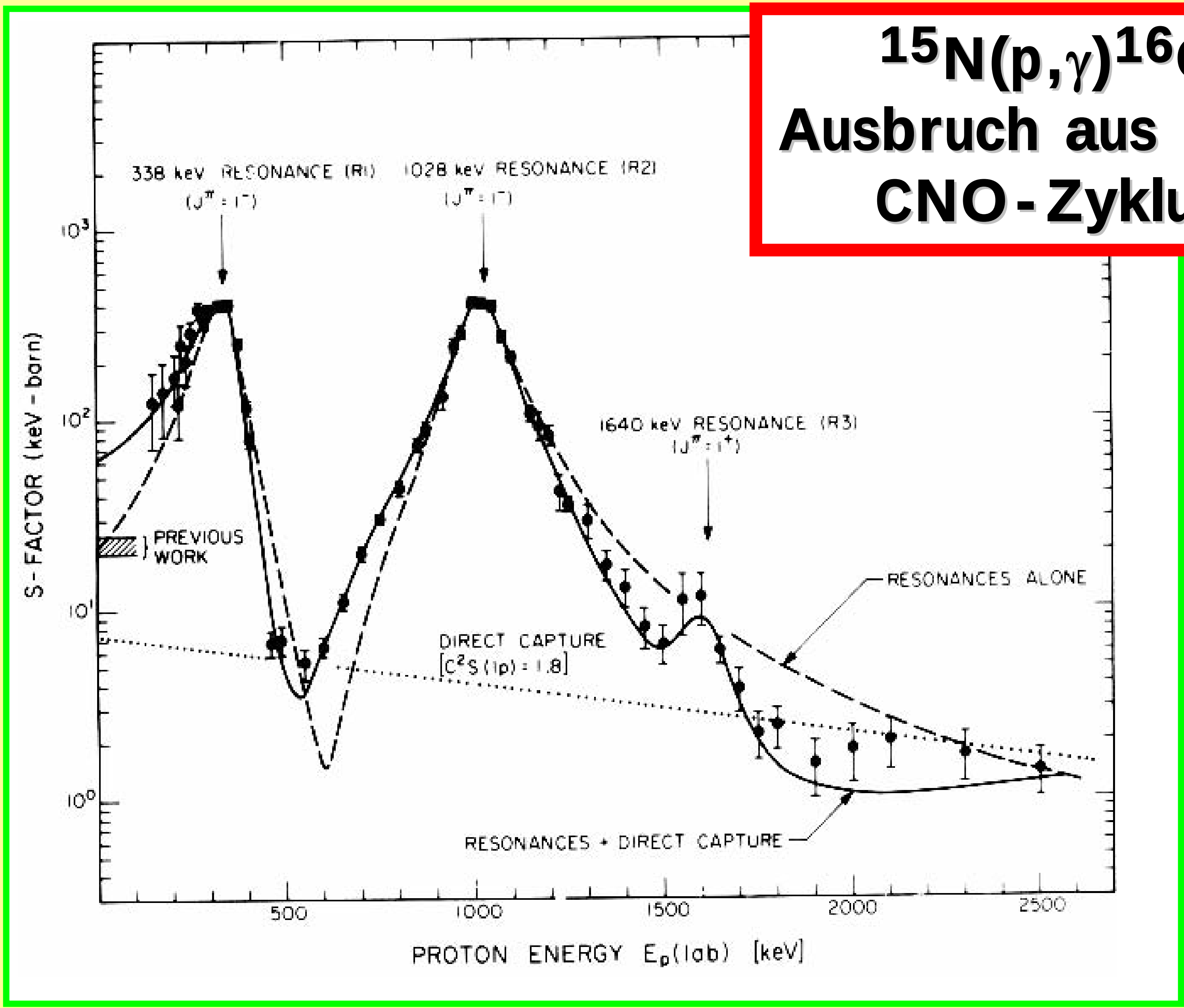
- Wirkungsquerschnitte in der Nähe von E_r können sehr hoch sein



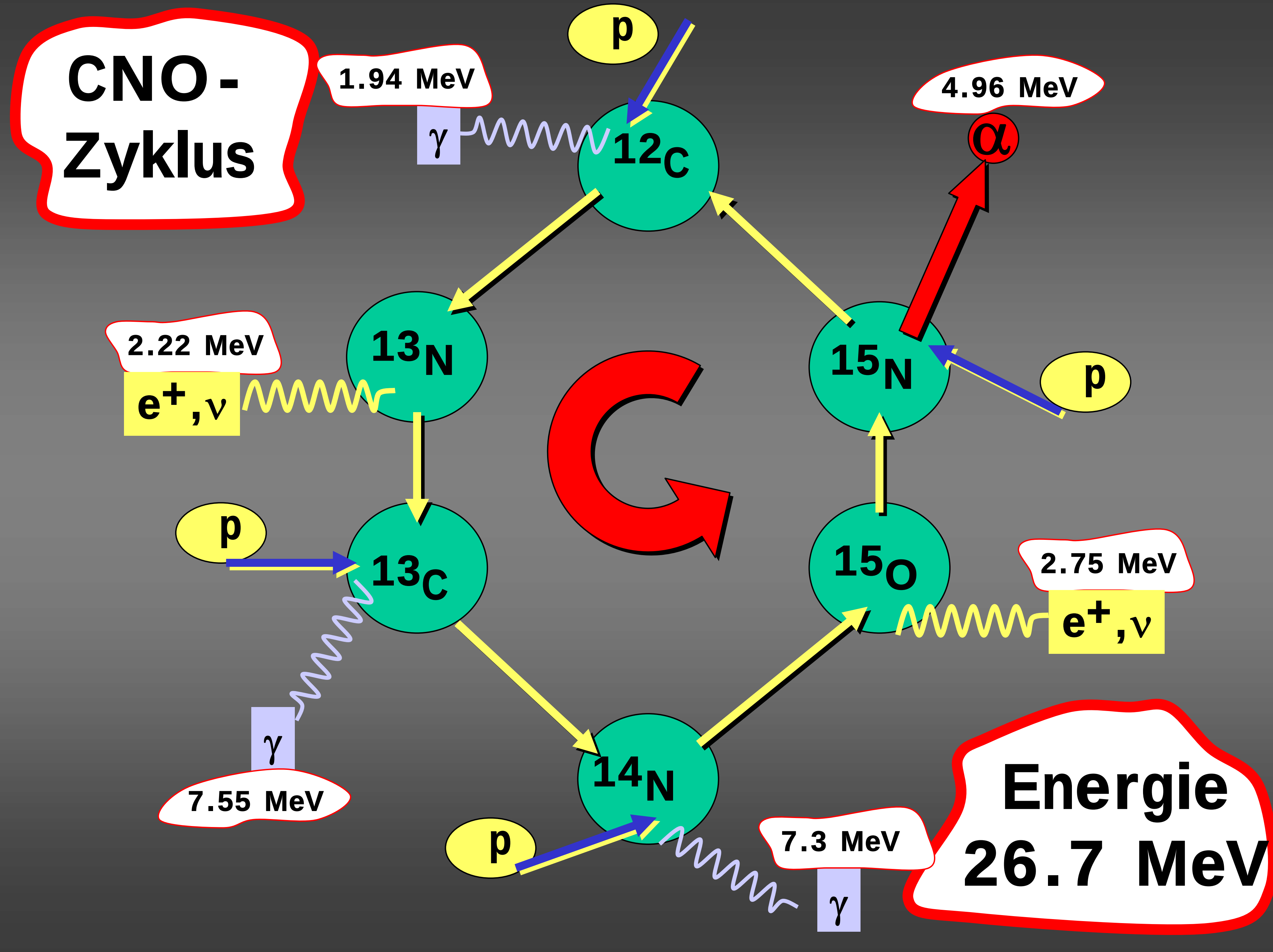
Einfluss von Resonanzen
(unterhalb und oberhalb der Reaktionsschwelle)



Reaktionen mit Resonanzen

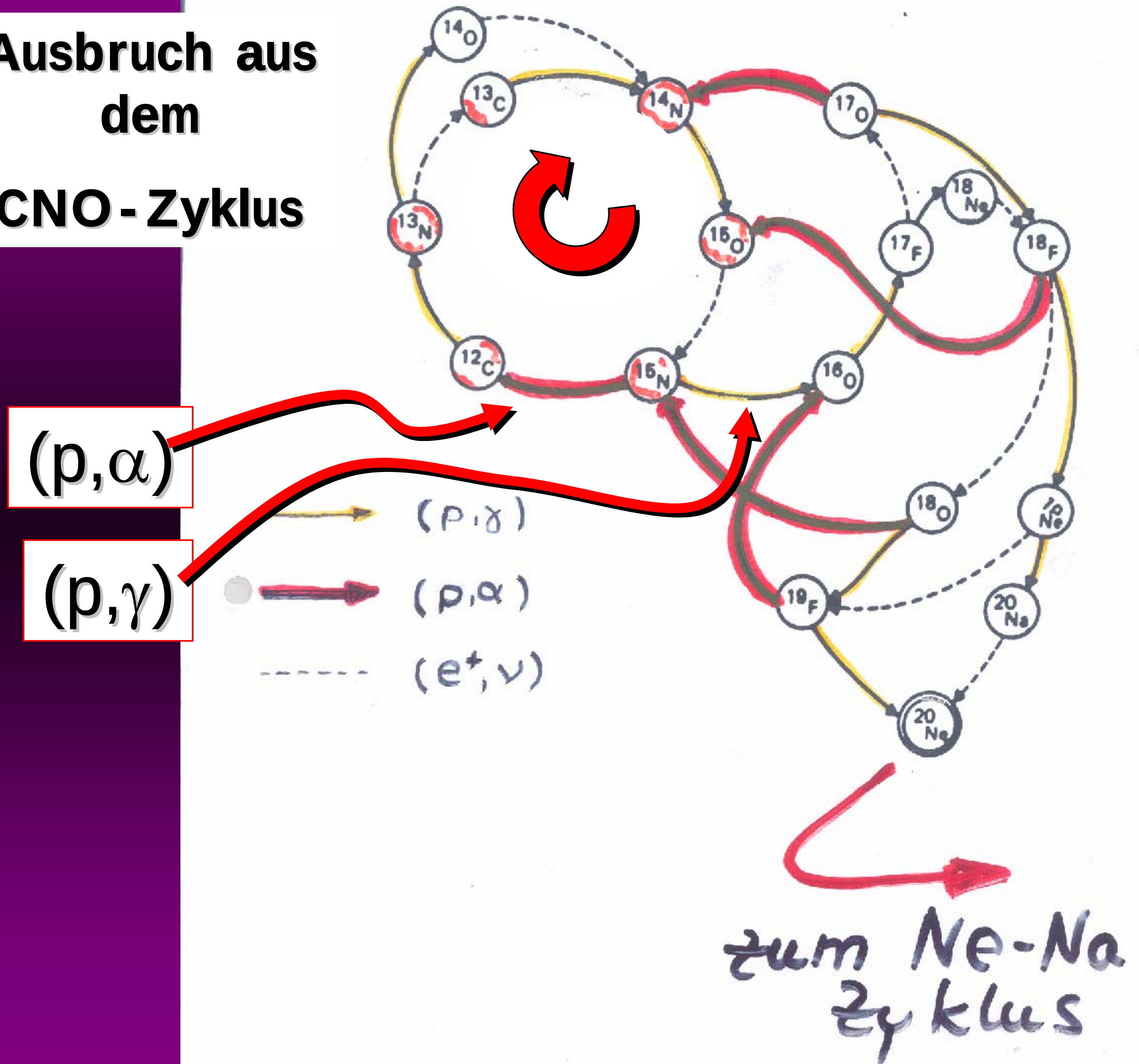


$^{15}N(p,\gamma)^{16}O$
Ausbruch aus dem CNO - Zyklus



CNO-Zyklus
p
1.94 MeV
γ
12C
4.96 MeV
α
2.22 MeV
e+,ν
13N
15N
p
p
13C
15O
2.75 MeV
e+,ν
γ
7.55 MeV
14N
p
7.3 MeV
γ
Energie 26.7 MeV

Ausbruch aus dem CNO - Zyklus



Reaktionen mit Resonanzen