



UNIVERSITÄT MÜNSTER

SEMINAR ZUR THEORIE DER ATOME, KERNE UND KONDENSIERTEN  
MATERIE

---

# Quantenmechanik im quasiklassischen Grenzfall: Die WKB-Methode

---

*Autor:*  
Magnus MOLITOR

*Betreuer:*  
Prof. Dr. Michael ROHLFING

14. Januar 2015

# Inhaltsverzeichnis

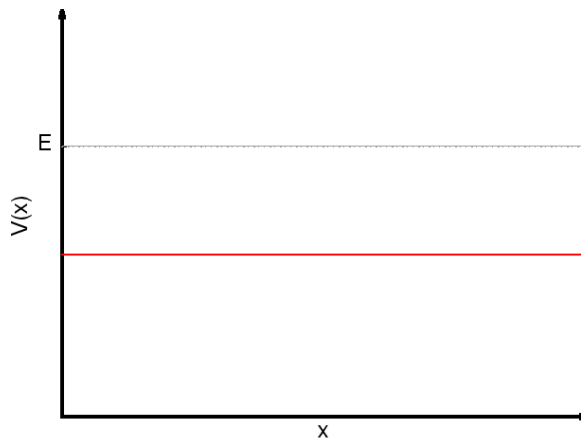
<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundidee</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Der klassische Bereich</b>	<b>2</b>
3.1	Potentialtopf mit zwei vertikalen Wänden . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Tunneleffekt</b>	<b>5</b>
4.1	Gamow'sche Theorie des Alphazerfalls . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Verbindungsgleichungen</b>	<b>7</b>
5.1	Harmonischer Oszillator . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Literatur</b>	<b>13</b>

## 1 Einleitung

Die WKB-Methode wurde von den Wissenschaftlern **W**entzel, **K**ramers und **B**rillouin unabhängig voneinander im Jahr 1926 vorgeschlagen. Es handelt sich hierbei um ein quasiklassisches Näherungsverfahren zur Lösung der effektiv eindimensionalen stationären Schrödingergleichung. Die folgende Ausarbeitung beinhaltet die Grundlagen, die Methodik und die Anwendungsmöglichkeiten der WKB-Methode.

## 2 Grundidee

Die WKB-Methode basiert auf einer einfachen Grundidee. Zunächst soll ein Teilchen der Energie  $E > V$  in einem konstanten Potential  $V$  betrachtet werden (vgl. Abb.: 1).



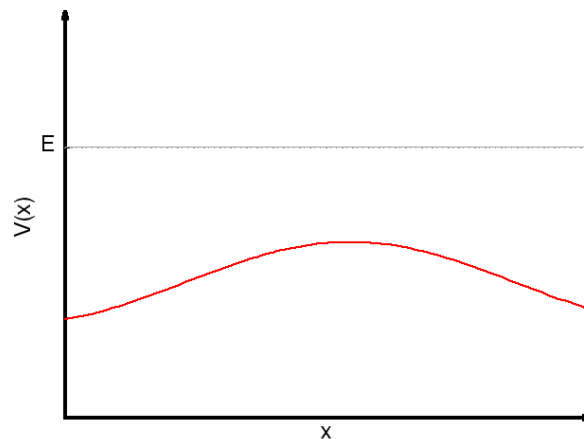
**Abbildung 1:** Teilchen der Energie  $E$  in einem konstanten Potential  $V$

Als Lösung der Schrödingergleichung ergibt sich eine ebene Welle:

$$\psi(x) = Ae^{\pm ikx} \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{2m(E - V)}/\hbar. \quad (1)$$

Es lassen sich zudem zwei triviale Aussagen über die Wellenfunktion (1) treffen: Zum einen ist die Amplitude  $A$  eine Konstante, zum anderen oszilliert die Welle mit einer festen Wellenlänge  $\lambda$ , welche durch  $\lambda = 2\pi/k$  gegeben ist.

In Abbildung 2 ist ein variables Potential skizziert, welches insbesondere nur eine schwache Ortsabhängigkeit im Vergleich zur Wellenlänge  $\lambda$  aufweisen soll.



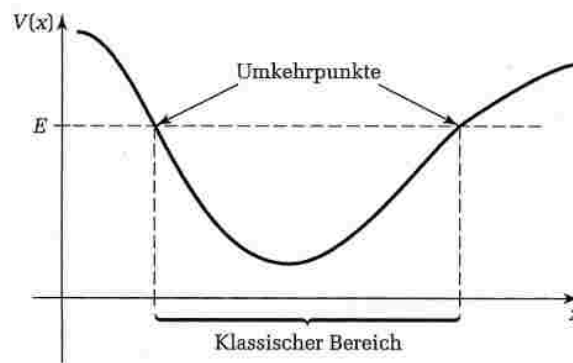
**Abbildung 2:** Teilchen der Energie  $E$  in einem variablen Potential  $V(x)$

Praktisch bedeutet diese Randbedingung, dass das Potential  $V(x)$  über mehrere Wellenlängen als konstant betrachtet werden kann. Die Wellenfunktion sollte in diesem Fall ebenfalls eine Sinusschwingung wie Gleichung (1) darstellen, jedoch sollten die Amplitude  $A$  und Wellenlänge  $\lambda$  eine schwache Ortsabhängigkeit erhalten.

Eine analoge Betrachtungsweise ergibt sich auch für die Bedingung  $E < V(x)$ . Grundlage bildet in diesem Fall die exponentiell ansteigende/abfallende Lösung der Schrödingergleichung.

### 3 Der klassische Bereich

Zur Herleitung der WKB-Methode im klassischen Bereich wird folgende Abbildung 3 betrachtet.



**Abbildung 3:** Teilchen der Energie  $E$  in einem variablen Potential  $V(x)$  [2]

Da die im Folgenden hergeleitete WKB-Näherung sich zunächst nur auf den klassischen Bereich beschränkt, ist sie auch nur in dem durch obige Umkehrpunkte beschränkten Bereich gültig.

Die Schrödingergleichung lässt sich durch Einführung des klassischen Impulses  $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$  in folgende Form überführen:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi. \quad (2)$$

Das Rückbesinnen auf die Grundidee liefert folgenden erfolgversprechenden Ansatz:

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}, \quad (3)$$

wobei sowohl die Amplitude  $A(x)$  als auch die Phase  $\phi(x)$  als reelle Funktionen betrachtet werden können.

Einsetzen des Ansatzes in die Gleichung (2) liefert <sup>1</sup>:

$$A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2}A. \quad (4)$$

Diese Gleichung lässt sich aufgrund der Betrachtung reeller Funktionen  $A(x), \phi(x)$  äquivalent in zwei Gleichungen für Imaginär- und Realteil überführen:

$$A'' = A \left[ (\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right] \quad (5)$$

$$2A'\phi' + A\phi'' = (A^2\phi')' = 0. \quad (6)$$

Die Lösung der unteren Gleichung (6) lässt sich einfach durch Integration bestimmen zu:

$$A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}}, C \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Die obere Gleichung (5) lässt sich allgemein nicht lösen, sodass hier die eigentliche Näherung angewandt werden muss. Die Annahme einer langsam veränderlichen Amplitude und einer schwachen Ortsabhängigkeit der Wellenlänge, führt auf folgende Abschätzung:

$$\frac{A''}{A} \ll (\phi')^2 \text{ und } \frac{p^2}{\hbar^2}. \quad (8)$$

In diesem Fall ergibt die Lösung des Klammerterms der Gleichung (5):

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) dx. \quad (9)$$

Nach Einsetzen der beiden Teillösungen (7) und (9) in den Ansatz (3) folgt für die Näherungslösung:

$$\psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx}. \quad (10)$$

Die Integrationskonstante wird in diesem Zusammenhang nicht festgelegt, da jede anfallende Integrationskonstante in die Normierungskonstante einbezogen werden kann. Die allgemeine Näherungslösung ergibt sich aus der Linearkombination der beiden Terme.

Physikalisch messbar ist nur das Betragsquadrat der Gleichung (10), welches sich wie folgt schreiben lässt:

$$|\psi(x)|^2 \cong \frac{|C|^2}{p(x)}. \quad (11)$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens am Ort  $x$  ist somit umgekehrt proportional zu seinem klassischen Impuls (und damit zu seiner Geschwindigkeit).

---

<sup>1</sup>Die Ortsableitung wird durch einen Hochstrich (') gekennzeichnet.

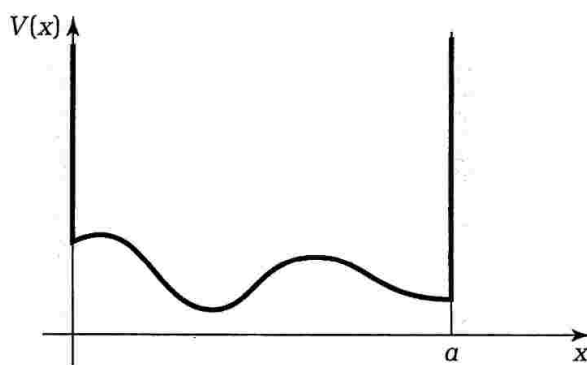
Dies entspricht genau der Erwartung, denn ein Teilchen hält sich in den Bereichen, in denen es eine große Geschwindigkeit besitzt, nicht lange auf und somit ist es auch unwahrscheinlich es dort anzutreffen.

Diese semiklassische Beobachtung steht in diesem Fall am Ende der Herleitung, alternativ lässt sich die WKB-Methode auch ausgehend von dem Korrespondenzprinzip herleiten [1, s. S. 213 ff].

### 3.1 Potentialtopf mit zwei vertikalen Wänden

Das in Abbildung 4 dargestellte Potential beschreibt einen Potentialtopf mit unebenen Boden und lässt sich mathematisch wie folgt formulieren:

$$V(x) = \begin{cases} \text{„beliebig“} & ,0 < x < a \\ \infty & \text{,sonst.} \end{cases}$$



**Abbildung 4:** Unendlich tiefer Potentialtopf mit unebenen Boden [2]

Die gesamte Lösung der Gleichung (10) kann geschrieben werden als:

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_1 \sin \phi(x) + C_2 \cos \phi(x)] \quad , \quad \phi(x) = \frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x') dx'. \quad (12)$$

Aus den Randbedingungen kann folgende Quantisierungsbedingung abgeleitet werden:

$$\int_0^a p(x) dx = n\pi\hbar \quad (13)$$

Für den Spezialfall „Ebener Boden“ liefert die Quantisierungsbedingung den exakten Ausdruck für die Energieniveaus:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \quad (14)$$

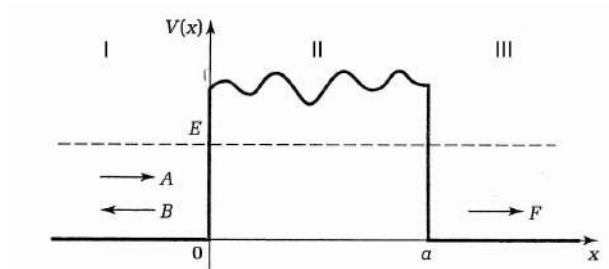
Die Exaktheit des genährten Energieniveaus resultiert aus der Konstanz von  $A(x)$ , sodass die Vernachlässigung von  $A''(x)$  in Gleichung (5) keinen Einfluss auf die WKB-Näherung ausübt.

## 4 Tunneleffekt

Bislang wurde stets  $E > V$  vorausgesetzt, sodass  $p(x)$  eine reelle Größe darstellt. Im klassisch verbotenen Bereich ergibt sich nun ein komplexes  $p(x)$  und über eine analoge Herleitung folgt für die Näherungslösung:

$$\Rightarrow \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx}. \quad (15)$$

Exemplarisch soll nun der Transmissionskoeffizient für das in Abbildung 5 dargestellte Potential ermittelt werden.



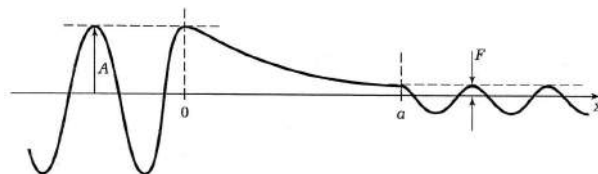
**Abbildung 5:** Streuung an einer rechteckigen Barriere mit unebener Oberseite[2]

Die Wellenfunktion in den durch römische Zahlen gegliederten Bereichen des Potentials bestimmt sich zu:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ \psi_{II}(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} \\ \psi_{III}(x) = Fe^{ikx}. \end{cases} \quad (16)$$

Hierbei stellt die Welle mit Koeffizienten  $A$  die nach rechts einlaufende Welle und jene mit Koeffizienten  $B$  die reflektierte Welle dar. Im Bereich II, dem Tunnelbereich, wurde die WKB-Näherung verwendet. Zuletzt beschreibt die Wellenfunktion  $\psi_{III}$  eine auslaufende ebene Welle mit Amplitude  $F$ , eine Reflexion im Unendlichen wird nicht angenommen.

Der rot markierte Term der WKB-Näherung sollte für eine sehr hohe und/oder sehr breite Barriere verschwinden, da in diesem Fall die Tunnelwahrscheinlichkeit gering sein sollte. Die Wellenfunktion ist somit der in Abbildung 6 skizzierten Wellenfunktion sehr ähnlich.



**Abbildung 6:** Struktur der Wellenfunktion (qualitativ) bei der Streuung an einer hohen, breiten Barriere[2]

Der Transmissionskoeffizient ist somit im Wesentlichen durch die Abschwächung des Exponenti-

alters über den nicht klassischen Bereich bestimmt:

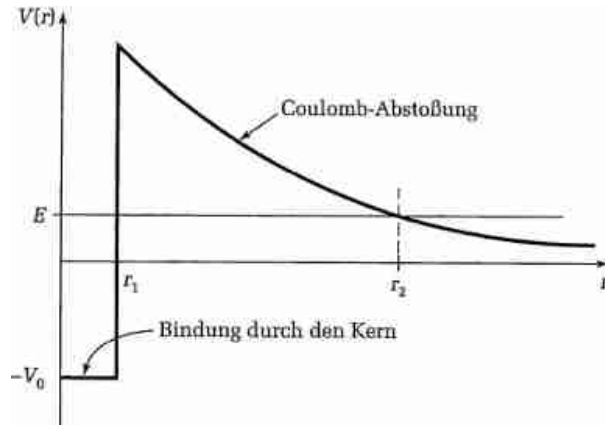
$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} \cong e^{-2\gamma} \quad \text{mit Tunnelfaktor} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x')| dx'. \quad (17)$$

#### 4.1 Gamow'sche Theorie des Alphazerfalls

Der Alphazerfall ist die spontane Emission eines Alphateilchens, welches aus zwei Protonen und zwei Neutronen besteht.

Entfernt sich ein Alphateilchen von dem verbliebenen Kern, so wirken ab einer bestimmten Entfernung die kurzreichweitigen Kernbindungskräfte nicht mehr und es erfährt eine abstoßende Kraft aufgrund seiner zweifach positiven Ladung. Zusätzlich muss es eine Potentialbarriere überwinden, welche etwa doppelt so groß ist wie die Energie  $E$  des Alphateilchens.

George Gamow entwickelte zur Beschreibung des Alphazerfalls folgendes Modell: Das anziehende Kernbindungspotential näherte er durch einen Potentialtopf der Tiefe  $V_0$  und Breite  $2r_1$  (Kernradius) und verband ihn mit einem abstoßenden Coulombpotential. Zudem deutete er den Emissionsmechanismus des Alphateilchens als quantenmechanisches Tunneln. Folgende Abbildung 7 zeigt die schematische Darstellung des Modells.



**Abbildung 7:** Das Gamow'sche Modell für die potentielle Energie eines Alphateilchens in einem radioaktiven Kern[2]

Der Tunnelfaktor ergibt sich ähnlich wie bei der Streuung an einer rechteckigen Barriere (Gleichung 17) zu:

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr. \quad (18)$$

Das Integral lässt sich durch Substitution ( $r = r_2 \sin^2(u)$ ) lösen und da der Kernradius  $r_1$  sehr viel kleiner als der äußere Umkehrpunkt  $r_2$  ist, folgt:

$$\gamma \cong \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[ \frac{\pi r_2}{2} - 2\sqrt{r_1 r_2} \right] = K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Z r_1},$$

wobei  $K_1 = 1,980 \text{ MeV}^{1/2}$  und  $K_2 = 1,485 \text{ fm}^{-1/2}$ . Die Vorstellung eines Alphateilchens, welches



sich mit einer mittleren Geschwindigkeit  $v$  im Kern bewegt, führt auf die mittlere Zeit  $t$  zwischen zwei „Stößen“ gegen die „Wand“:

$$t = \frac{2r_1}{v} = \frac{1}{f_{stoss}}$$

Für die Emissionswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit ergibt sich somit:

$$\epsilon = T \cdot f_{stoss} = \left(\frac{v}{2r_1}\right)e^{-2\gamma}$$

Die Lebensdauer des radioaktiven Kern ist näherungsweise wie folgt bestimmt:

$$\tau = \frac{2r_1}{v}e^{2\gamma} \Rightarrow \tau \propto e^{\frac{1}{\sqrt{E}}}$$

Die Unbekanntheit der Geschwindigkeit  $v$  stellt sich in diesem Zusammenhang nicht als Problem dar, da der Exponentialfaktor beim Übergang von einem radioaktiven Kern zu einem anderen radioaktiven Kern über 25 Größenordnungen variiert und somit die Änderung von  $v$  kaum ins Gewicht fällt.

Die experimentelle Übereinstimmung der theoretisch ermittelten Proportionalität in Gleichung 4.1 zeigt folgende Abbildung 8.

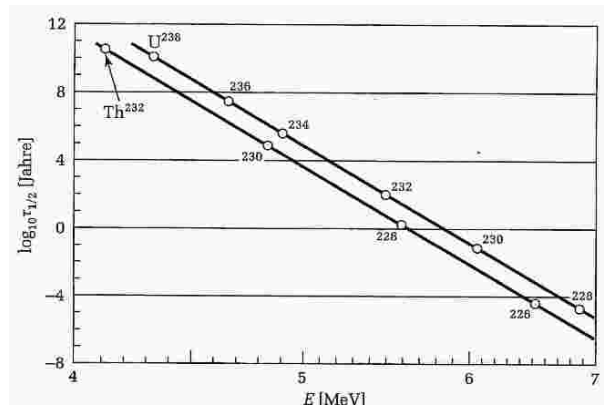


Abbildung 8: Logarithmus der Halbwertszeit ( $\tau_{1/2} = \tau \ln 2$ ) gegen  $1/\sqrt{E}$ [2]

## 5 Verbindungsgleichungen

Die Gleichungen für die Tunnelwahrscheinlichkeit (17) und für die Quantisierungsbedingung (13) wurde auf Basis von vertikalen Potentialwänden hergeleitet. Diese beiden Hauptergebnisse sind auch bei nicht so abrupten Rändern halbwegs richtig (vgl. Kapitel 4.1).

Dennoch ist es von Interesse näher zu ergründen, was an den klassischen Umkehrpunkten mit der Wellenfunktion geschieht. Die folgende Abbildung 9 zeigt die vergrößerte Darstellung eines rechten Umkehrpunktes, wobei der Umkehrpunkt durch  $V(x) = E$  definiert ist und sich in dieser Abbildung am Ort  $x = 0$  befindet.

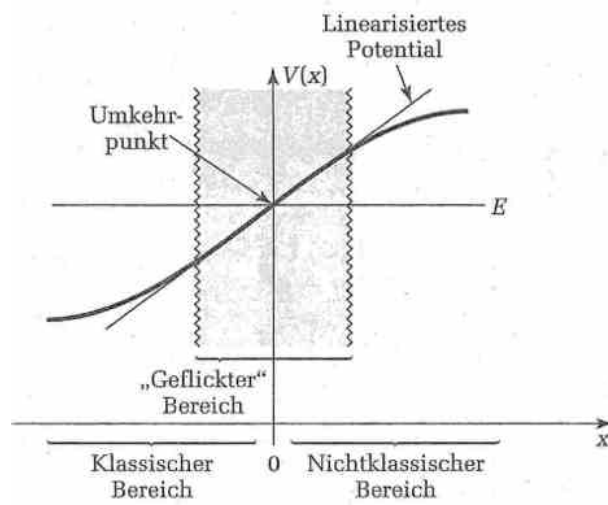


Abbildung 9: Vergrößerte Darstellung des rechten Umkehrpunktes[2]

Die WKB-Wellenfunktion kann wie folgt geschrieben werden:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \left[ B e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^0 |p(x')| dx'} + C e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^0 |p(x')| dx'} \right] & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} D e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (19)$$

Bei der Verbindung dieser beiden Lösungen ergibt sich ein Problem, denn im Umkehrpunkt ist die Energie  $E$  gleich dem Potential  $V(x)$  und somit  $p(x) = 0$ , sodass die WKB-Wellenfunktion dort divergiert.

Die Lösung dieses Problems ist die Einführung einer Flickwellenfunktion, welche im grau-schraffierten Bereich der Abbildung 9 der exakten Lösung der Schrödingergleichung entspricht und so eine sinnvolle Verknüpfung der beiden WKB-Wellenfunktion ermöglicht. Dies bedeutet, dass sowohl die WKB-Lösung für  $x < 0$  als auch jene für  $x > 0$  an die Flickwellenfunktion angepasst werden müssen.

Da die Flickwellenfunktion nur im Bereich des Ursprungs benötigt wird, kann das Potential linearisiert werden:

$$V(x) \cong E + V'(0)x. \quad (20)$$

Einsetzen des linearisierten Potentials (20) in die Schrödingergleichung liefert:

$$\frac{d^2 \psi_F}{dx^2} = \alpha^3 x \psi_F \quad , \text{ mit } \alpha \equiv \left[ \frac{2m}{\hbar^2} V'(0) \right]^{1/3}. \quad (21)$$

Nach Skalierung  $z \equiv \alpha x$  ergibt sich:

$$\frac{d^2 \psi_F}{dz^2} = z \psi_F \quad (22)$$

Die Lösung dieser Gleichung sind die Airyfunktionen, welche in folgender Abbildung 10 dargestellt sind.

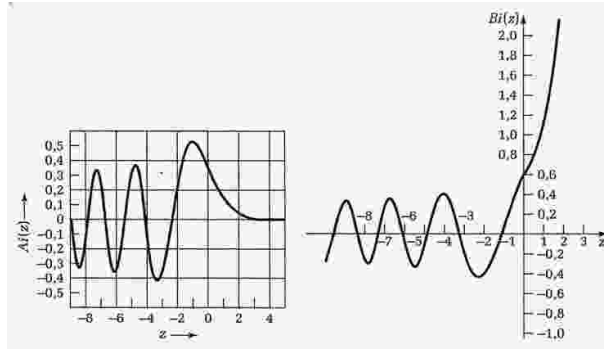


Abbildung 10: Graph der Airyfunktion[2]

Die Flickwellenfunktion  $\psi_F$  ist offenbar die Linearkombination von  $Ai(x)$  und  $Bi(x)$ :

$$\psi_F(x) = aAi(\alpha x) + bBi(\alpha x).$$

Zur weiteren Behandlung sind vor Allem die asymptotischen Formen ( $z \gg 0$ ) der Airyfunktionen bedeutsam:

$$Ai(z) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}(z)^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \quad \text{und} \quad Bi(z) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}(z)^{1/4}} e^{\frac{2}{3}z^{3/2}}.$$

Es folgt nun die Anpassung der Flickwellenfunktion  $\psi_F$  an die WKB-Lösung auf beiden Seiten des Überlappbereichs (vgl. Abb.: 11). In diesen Überlappbereichen sollen sowohl die WKB-Lösung als auch die Flickwellenfunktion näherungsweise die exakte Lösung wiedergeben.

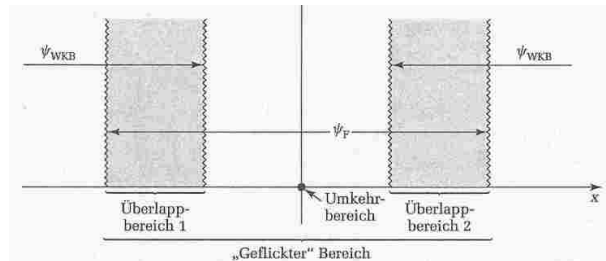


Abbildung 11: Gefflickter Bereich und die beiden Überlappbereiche[2]

Wird zunächst der Überlappbereich 2 betrachtet, gilt dort das linearisierte Potential (20) und durch Integration ergibt sich für die WKB-Lösung:

$$\psi \cong \frac{D}{\sqrt{\hbar}\alpha^{3/4}x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}. \quad (23)$$

Durch Koeffizientenvergleich der asymptotischen Formen der Airyfunktionen (22) und der WKB-Wellenfunktion (23) lässt sich folgende Relation herleiten<sup>2</sup>:

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha\hbar}} D, \quad b = 0. \quad (24)$$

<sup>2</sup>Scheinbare Paradoxon der Verwendung der asymptotischen Formen der Airyfunktion kann durch die Skalierung  $z = \alpha x$  aufgehoben werden

Entsprechend lässt sich eine Beziehung aus dem Überlappbereich 1 ableiten, hier müssen die asymptotischen Formen für negative  $Z$  verwendet werden:

$$\frac{a}{2i\sqrt{\pi}}e^{i\pi/4} = \frac{B}{\sqrt{\hbar\alpha}}, \quad \frac{-a}{2i\sqrt{\pi}}e^{-i\pi/4} = \frac{C}{\sqrt{\hbar\alpha}}. \quad (25)$$

Die beiden zuletzt genannten Gleichungen (24) und (25) werden als Verbindungsgleichungen bezeichnet, und stellen somit eine sinnvolle Verknüpfung der beiden WKB-Lösungen dar.

Werden die Koeffizienten der Wellengleichungen (19) nun mit Hilfe der Verbindungsgleichungen durch  $D$  ausgedrückt, lässt sich folgende WKB-Wellenfunktion finden:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{2D}{\sqrt{|p(x)|}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} |p(x')| dx' + \frac{\pi}{4} \right] & \text{für } x < x_2 \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'} & \text{für } x > x_2. \end{cases} \quad (26)$$

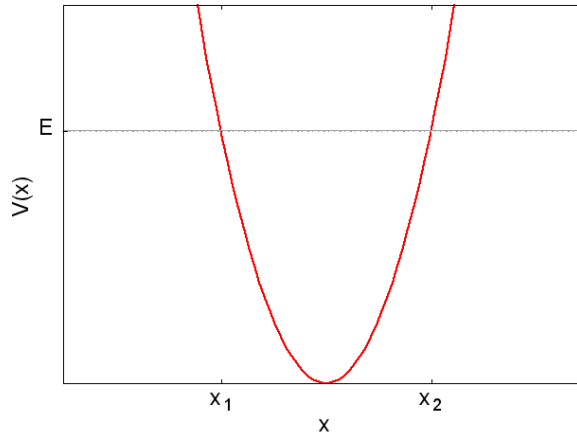
Zu beachten ist, dass die WKB-Wellenfunktion nicht in unmittelbarer Nähe des klassischen Umkehrpunktes gilt. In diesem Bereich muss die Airyfunktion verwendet werden.

## 5.1 Harmonischer Oszillator

Gleichungen (24) und (25) verbinden die WKB-Wellenfunktionen an einem rechtsseitigen Umkehrpunkt, ebenso lässt sich eine Beziehung für ein abwärts geneigtes Potential herleiten. Insgesamt ergibt sich somit für die WKB-Lösung im klassischen Bereich ( $x_1 = -\sqrt{\frac{2E}{m\omega}} < x < x_2 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega}}$ ) des harmonischer Oszillatorpotentials (vgl. Abb.: 12):

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{-2D'}{\sqrt{|p(x)|}} \sin \theta_1(x) & \text{für } x > x_1 \\ \frac{2D}{\sqrt{|p(x)|}} \sin \theta_2(x) & \text{für } x < x_2 \end{cases}, \quad (27)$$

wobei  $\theta_1(x) = -\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx' - \frac{\pi}{4}$  und  $\theta_2(x) = \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} |p(x')| dx' + \frac{\pi}{4}$ .



**Abbildung 12:** Teilchen der Energie  $E$  in einem harmonischen Oszillatorpotential  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

Die Argumente des Sinus aus Gleichung 27 müssen um  $n\pi$  verschieden sein:

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = (n + \frac{1}{2})\pi\hbar \quad \text{mit } n \in N_0$$

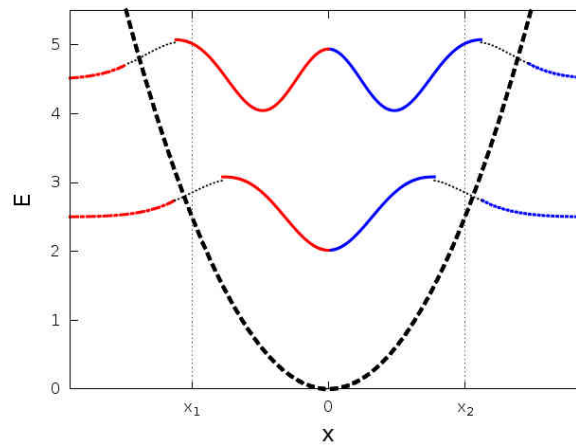
Einsetzen des Impulses und Integration liefert schließlich die exakten Energieniveaus des harmonischen Oszillators:

$$E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega.$$

Ob die WKB-Wellenfunktion ebenso das exakte Ergebnis wiedergibt, soll im Folgenden anschaulich überprüft werden.

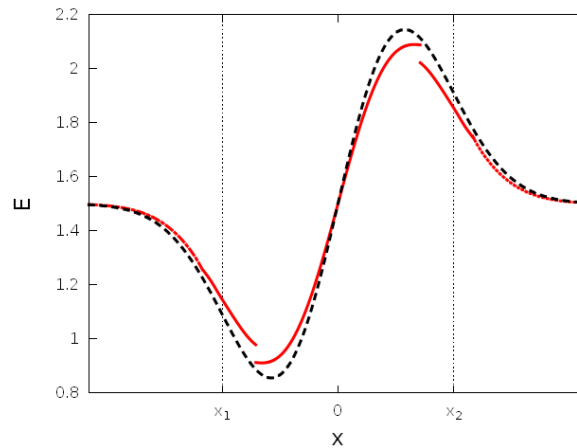
Die gesamte genäherte Wellenfunktion setzt sich insgesamt aus sechs abschnittsweise definierten Funktionen zusammen. Rein qualitativ sollte sich somit im klassischen Bereich eine Oszillation ergeben, welche dann nach Überbrückung der Umkehrpunkte durch die Airyfunktion in einen exponentiellen Abfall mündet.

Die folgende Abbildung zeigt die genährte Wellenfunktion für  $n = 2$  und  $4$ .



**Abbildung 13:** Wellenfunktion für  $n=2$  und  $n=4$   
(Skalierung  $\hbar = \omega = m = 0$ )

Es hat optisch den Anschein eines sehr guten Ergebnisses der Näherung. Doch gerade im Bereich kleiner Quantenzahlen ergeben sich deutliche Abweichungen zur exakten Lösung, wie folgende Abbildung 14 zeigt.

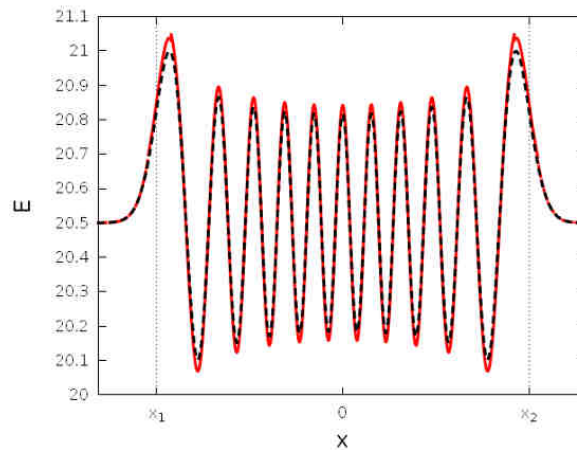


**Abbildung 14:** Vergleich von  $\psi_{wkb}$  mit  $\psi_{exakt}$  für  $n=1$

Diese Abweichungen lassen sich auf die Grundidee dieser Näherungslösungen zurückführen: Es wurde ein variables Potential angenommen, welches praktisch gesehen über mehrere Wellenlängen konstant ist.

Die Abbildung 14 zeigt eine gute Übereinstimmung der Näherung mit der exakten Lösung im Bereich des Ursprungs. Hier gilt  $E \gg V(x)$  und somit ist der Impuls groß, woraus eine kleine Wellenlänge  $\lambda$  resultiert. Analog ergibt sich für  $x \rightarrow \pm\infty$  ein kleines  $k$ .

Für eine Quantenzahl von 20 ergibt sich folgende Abbildung 15.



**Abbildung 15:** Vergleich von  $\psi_{wkb}$  mit  $\psi_{exakt}$  für  $n=20$

Obige Abbildung zeigt, dass die Übereinstimmung mit der exakten Lösung der Schrödingergleichung besonders gut im quasiklassischen Bereich (große  $n$ ) ist.

## 6 Zusammenfassung

Die WKB-Methode stellt eine semiklassische Näherungsmethode zur Bestimmung der Lösung der eindimensionalen stationären Schrödingergleichung dar.

Besonders hilfreich ist der griffige Ausdruck für die Tunnelwahrscheinlichkeit und der geringe Aufwand zur Bestimmung der Bindungsenergien.

Dabei sollten die Beschränkungen der WKB-Methode nicht in Vergessenheit geraten. Sie ist gut anwendbar für kleine Wellenlängen und langsam veränderliche Potentiale. Außerdem sind die Resultate sehr gut im semiklassischen Bereich.

## 7 Literatur

- [1] NOLTING, W.: *Grundkurs Theoretische Physik 5/2: Quantenmechanik - Methoden und Anwendungen*. Springer London, Limited, 2006 (Grundkurs Theoretische Physik). – ISBN 9783540476160
- [2] GRIFFITHS, D.J.: *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson, 2013 (Pearson Custom Library). – ISBN 9781292024080
- [3] MURAYAMA, Hitoshi: *WKB Harmonic Oszillator*. <http://hitoshi.berkeley.edu/221a/HW6.nb.pdf>, Abruf: 08.01.2014