

Phasenübergänge im frühen Universum

Philipp Bovenkamp

30. November 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Grundzüge der Theorie der Phasenübergänge	2
2.1	Begriffsklärung und thermodynamische Beschreibung	2
2.2	Klassifikation von Phasenübergängen	4
2.2.1	Die EHRENFEST'sche Klassifikation	4
2.2.2	Phasenübergänge 1. Ordnung	4
2.2.3	Phasenübergänge 2. Ordnung	5
2.2.4	Kritik an der EHRENFEST'schen Klassifikation	5
2.3	Grundzüge der GINZBURG-LANDAU-Theorie der Phasenübergänge	6
3	Phasenübergänge im frühen Universum	8
3.1	Vorüberlegungen: Symmetriegruppen der fundamentalen Wechselwirkungen . . .	8
3.2	Spontane Symmetriebrechung	9
3.2.1	Ein einfaches Modell	9
3.2.2	Wiederherstellung der Symmetrie bei hohen Temperaturen	10
3.3	Der elektroschwache Phasenübergang	11
3.4	Phasenübergang der Quantenchromodynamik (QCD)	13
3.5	Topologische Defekte	13
3.5.1	<i>Domain Walls</i>	13
3.5.2	<i>Cosmic Strings</i>	14
3.5.3	Magnetische Monopole	14
4	Zusammenfassung	15

1 Einleitung

Die Betrachtung von Phasenübergängen in der Natur gehört zu den ältesten Themen aus der Naturwissenschaft, wurden sie doch schon früh in der Phasenumwandlung der drei Aggregatzustände - fest, flüssig, gasförmig - beobachtet. Im Rahmen dieser Ausarbeitung zu einem gleichnamigen Seminarvortrag sollen zunächst die thermodynamischen Grundlagen in den Ursachen und den Beschreibungen von Phasenübergängen kurz diskutiert werden. Dabei wird sich zeigen, dass sich die Phasenübergänge anhand von Nichtanalytizitäten in den Ableitungen der thermodynamischen Potentiale zeigen und dass es zwei bedeutende Klassen von Phasenübergängen gibt: die Phasenübergänge erster und zweiter Ordnung.

Daran anschließend werden Phasenübergänge diskutiert, die im frühen Universum mit großer Wahrscheinlichkeit stattgefunden haben. Der Schwerpunkt soll dabei auf dem elektroschwachen Phasenübergang liegen. Es wird sich zeigen, dass die Phasenübergänge des frühen Universums sich nicht in direkt beobachtbaren, sichtbaren Phasenänderungen wie im Falle der Änderung von Aggregatzuständen zeigen, sondern vielmehr das Symmetrieverhalten des Universums betreffen. Die Begriffe spontane Symmetriebrechung und HIGGS-Mechanismus werden in diesem Zusammenhang von großer Bedeutung sein.

Bevor eine kurze Zusammenfassung über die besprochene Thematik gegeben wird, soll kurz auf mögliche Relikte eingegangen werden, die bei Phasenübergängen entstanden sein können.

2 Grundzüge der Theorie der Phasenübergänge

2.1 Begriffsklärung und thermodynamische Beschreibung

Phase: Als Phasen bezeichnet man die möglichen Zustandsformen eines makroskopischen Systems im thermischen Gleichgewicht.

In unterschiedlichen Phasen können verschiedene makroskopische Observable signifikant unterschiedliche Werte annehmen. Beispielsweise ist die Teilchendichte in einem Gas im Allgemeinen deutlich geringer als in einer Flüssigkeit, in der die Teilchendichte wiederum deutlich geringer als in einem Festkörper ist. Weitere Beispiele für makroskopische Observablen, die eine solche Phasenabhängigkeit zeigen, sind die Magnetisierung (Paramagnet, Ferromagnet, ...), die elektrische Leitfähigkeit (Metall, Isolator, Supraleiter, ...) oder die Kristallstruktur (bspw. Ordnungs-Unordnungs-Übergang zwischen α -Fe (bcc) und γ -Fe (fcc)).

Übergänge zwischen Phasen können dadurch induziert werden, dass Observable wie die Temperatur T oder der Druck p sogenannte *kritische Bereiche* aufweisen, in denen eine Änderung der Observable einen Phasenübergang zur Folge hat.

Die Abhängigkeit der Phasenänderung bezüglich dieser Observablen wird typischerweise in einem *Phasendiagramm* dargestellt. Abb. 1 zeigt das Phasendiagramm von reinem Wasser. Dabei lassen sich Einphasengebiete (hier: fest, flüssig, gasförmig) identifizieren, in denen eine einzelne Phase im thermischen Gleichgewicht vorliegt. Innerhalb dieser Einphasengebiete lassen sich der Druck p und die Temperatur T - in Grenzen - frei wählen, ohne, dass ein Phasenübergang stattfindet. Die

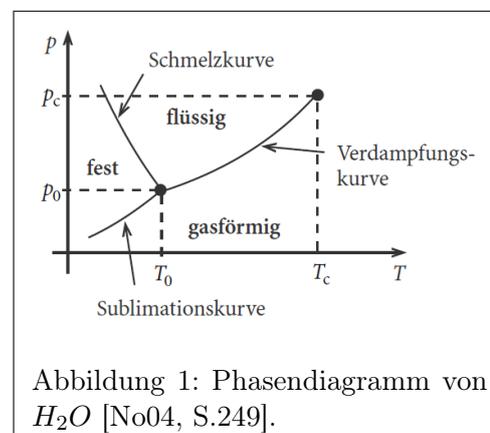


Abbildung 1: Phasendiagramm von H_2O [No04, S.249].

Phase besitzt also zwei Freiheitsgrade. Dies wird durch die GIBB'sche Phasenbeziehung ausgedrückt,

$$f = 2 + \alpha - \pi, \quad (2.1)$$

wobei f die Anzahl der Freiheitsgrade, α die Anzahl der Komponenten des Systems und π die Anzahl der Phasen beschreibt. Ebenso finden sich in einem Phasendiagramm Koexistenzkurven, in denen zwei Phasen gleichberechtigt vorliegen. Hier bestimmt die Wahl des einen Parameters p oder T den anderen, wenn man sich im (p, T) -Diagramm auf der Koexistenzlinie bewegt. Schließlich existiert noch der Tripelpunkt. An diesem Punkt stehen alle drei Phasen im Gleichgewicht und das System besitzt keinen Freiheitsgrad.

Die Ursache von Phasenübergängen:

Jedes thermodynamische System verfolgt das Ziel der Minimierung der freien Energie F bzw. der GIBB'schen freien Enthalpie G :

$$F = U - TS, \quad (2.2)$$

$$G = U - TS + pV. \quad (2.3)$$

Diese thermodynamischen Potentiale sind allgemein temperaturabhängig und es existiert eine Dualität im Minimierungsprozess, je nach vorherrschender Temperatur:

T klein: Die innere Energie U einer Phase bestimmt das Minimum, die Entropie S spielt eine untergeordnete Rolle.

T groß: Der zweite Term überwiegt und die Entropie S spielt die dominante Rolle.

Man erwartet also für tiefe Temperaturen geordnete - also möglichst symmetrische - Zustände, da diese eine geringe innere Energie besitzen und für hohe Temperatur eine steigende Unordnung. Unterschiedliche Phasen α, β besitzen nun unterschiedliche innere Energien U_i und Entropien S_i ($i = \alpha, \beta$) und damit unterschiedliche GIBB'sche freie Enthalpien G_i . Abb. 2 zeigt dies für einen Phasenübergang von einer flüssigen zu einer gasförmigen Phase: Die Kurven der GIBB'schen freien Enthalpie besitzen für die Phasenumwandlungstemperatur T_u einen Schnittpunkt. Für tiefe Temperaturen ist die freie Enthalpie für die flüssige Phase geringer, so dass dies die thermisch stabile Phase ist. Jenseits des Schnittpunkts ist die freie Enthalpie des Gases geringer, so dass ein Phasenübergang bei $T = T_u$ stattfindet.

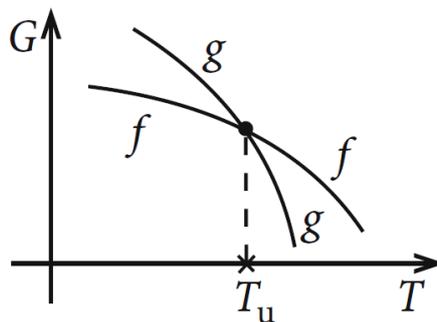


Abbildung 2: Verhalten der GIBB'schen freien Enthalpie G am Phasenübergang *flüssig-gasförmig* [No06, S.282].

2.2 Klassifikation von Phasenübergängen

2.2.1 Die EHRENFEST'sche Klassifikation

Nach der EHRENFEST'schen Klassifikation führt man die Ordnung eines Phasenübergangs auf das Verhalten der GIBB'schen freien Enthalpie G und ihrer Ableitungen nach ihren natürlichen Variablen p und T zurück:

„Nach EHRENFEST (1933) definiert man als Ordnung des Phasenübergangs die Ordnung des niedrigsten Differentialquotienten von G , der beim Überschreiten der Koexistenzlinie eine Diskontinuität aufweist“ [No04, S.259].

Im Falle eines Phasenübergangs n -ter Ordnung zwischen zwei Phasen α, β bedeutet dies mathematisch:

G sowie alle m -ten Ableitungen von G ($m < n$) sind stetig wohingegen $\frac{\partial^n G}{\partial x^n}$ am Übergangspunkt unstetig ist (x natürliche Variable von G):

$$\left(\frac{\partial^m G_\alpha}{\partial T^m}\right)_p = \left(\frac{\partial^m G_\beta}{\partial T^m}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial^m G_\alpha}{\partial p^m}\right)_T = \left(\frac{\partial^m G_\beta}{\partial p^m}\right)_T \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial^n G_\alpha}{\partial T^n}\right)_p \neq \left(\frac{\partial^n G_\beta}{\partial T^n}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial^n G_\alpha}{\partial p^n}\right)_T \neq \left(\frac{\partial^n G_\beta}{\partial p^n}\right)_T \quad (2.5)$$

2.2.2 Phasenübergänge 1. Ordnung

Der Phasenübergang in 1. Ordnung nach EHRENFEST ist von großer Bedeutung für die Physik der Phasenübergänge. Nach der Klassifikation lauten die Bedingungen an einen Phasenübergang in 1. Ordnung wie folgt:

- Freie Enthalpie $G(T, p)$ ist stetig,
- erste Ableitungen der freien Enthalpie $G(T, p)$ nach ihren natürlichen Variablen,

$$S(T, p) = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p, \quad V(T, p) = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T,$$

unstetig.

Abb. 3 zeigt qualitativ den Verlauf der freien Enthalpie und ihrer ersten Ableitungen für einen Phasenübergang einer gasförmigen in eine flüssige Phase. Der Volumensprung $\Delta V = V_g - V_f$ und der Entropiesprung $\Delta S = S_g - S_f$ sind dabei eingezeichnet.

Beispiele für Phasenübergänge erster Ordnung sind Phasenumwandlungen der Aggregatzustände. In älterer Literatur wird auch der HIGGS-Mechanismus (siehe Kap. 3.3) als Beispiel für einen Phasenübergang erster Ordnung genannt, aufgrund des heutigen Kenntnisstands der HIGGS-Masse lässt sich dieser Phasenübergang jedoch nicht unter Phasenübergänge erster Ordnung fassen.

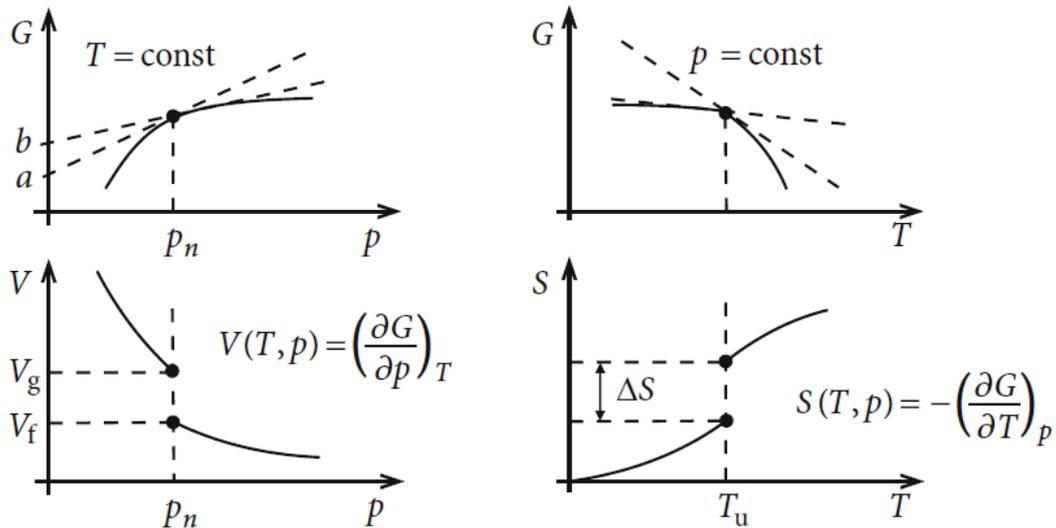


Abbildung 3: Qualitativer Verlauf der freien Enthalpie G und ihrer ersten Ableitungen nach ihren natürlichen Variablen p, T für einen Phasenübergang 1. Ordnung [No06, S.281]

2.2.3 Phasenübergänge 2. Ordnung

Neben den Phasenübergängen erster Ordnung fallen einige beobachtbare Phasenübergänge nach der EHRENFEST'schen Klassifikation unter die Phasenübergänge zweiter Ordnung. Diese zeichnen durch die folgenden Eigenschaften aus:

- Freie Enthalpie $G(T, p)$ ist stetig,
- die ersten Ableitungen der freien Enthalpie $G(T, p)$ nach ihren natürlichen Variablen, $S(T, p)$, $V(T, p)$, sind stetig,
- die zweiten Ableitungen der freien Enthalpie $G(T, p)$ nach ihren natürlichen Variablen, die sogenannten *Response-Funktionen* oder Suszeptibilitäten,

$$C_p = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_p,$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial p^2} \right)_T,$$

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p},$$

sind unstetig.

Phasenübergänge zweiter Ordnung zeigen VAN DER WAALS-Gase oder WEISS'sche Ferromagneten und Supraleiter. Der Ordnungs-Unordnungs-Phasenübergang in β -Messing nach dem BRAGG-WILLIAMS-Modell ist ebenfalls ein Phasenübergang zweiter Ordnung.

2.2.4 Kritik an der EHRENFEST'schen Klassifikation

Die Klassifikation der Phasenübergänge nach EHRENFEST zeigt einige Schwächen. Zum einen gibt EHRENFEST in seiner Klassifikation nach der Ordnung n im Prinzip Auskunft über beliebige Ordnungen von Phasenübergängen. Für steigendes n , das die erste Unstetigkeit aufweist, werden

die Unterschiede zwischen den Phasen immer geringer, so dass eine Unterscheidung für hohe n unsinnig erscheint. Des Weiteren werden in der Physik nur Phasenübergänge erster und zweiter Ordnung beobachtet. Da nur der ersten und der zweiten Ableitung eines thermodynamischen Potentials eine eindeutige physikalische Realität zugeordnet werden kann, werden Phasenübergänge in der Physik nur nach erster und zweiter Ordnung klassifiziert. Es bietet sich deshalb an eine alternative Klassifikation der Phasenübergänge an, die nur nach den Eigenschaften der ersten Ableitung der freien Enthalpie G klassifiziert:

- PHASENÜBERGANG 1. ORDNUNG: *diskontinuierlicher* Phasenübergang,
- PHASENÜBERGANG 2. ORDNUNG: *kontinuierlicher* Phasenübergang,

In den nachfolgenden Kapiteln soll diese Klassifikation verwendet werden.

Ein weiterer Kritikpunkt an der EHRENFEST'schen Klassifikation zeigt sich im Verhalten der Suszeptibilitäten, also der zweiten Ableitungen der freien Enthalpie. Diese zeigen - mit Ausnahme für den Supraleiter - keine endlichen Sprünge sondern vielmehr echte *Divergenzen*, wie es in Abb. 4 gezeigt ist.

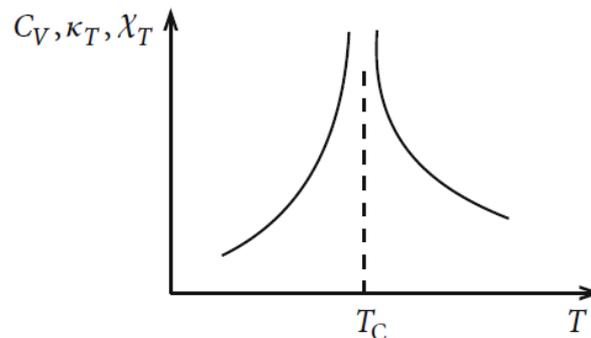


Abbildung 4: Divergenz der Suszeptibilitäten beim Phasenübergang zweiter Ordnung [No06, S.287].

2.3 Grundzüge der GINZBURG-LANDAU-Theorie der Phasenübergänge

Die meisten Modelle zur Beschreibung von Phasenübergängen behandeln den Anfangs- und den Endzustand einer in der Umwandlung befindlichen Phase, so wie es in der EHRENFEST'schen Klassifikation durch die Diskontinuitäten der Ableitungen dargestellt ist. Dabei werden die beteiligten Phasen getrennt und nur als reine Phasen berücksichtigt. Im Gegensatz zu diesen „einfachen“ Theorien ist es das Ziel der GINZBURG-LANDAU-Theorie die freie Enthalpie G im *Phasenumwandlungsgebiet* für *kontinuierliche* Phasenübergänge explizit anzugeben bzw. näherungsweise zu berechnen.

Im Rahmen der *Ginzburg-Landau*-Theorie stößt man unweigerlich auf die Begriffe *Ordnungsparameter* und *Korrelationslänge*, die zunächst kurz näher betrachtet werden sollen.

Ordnungsparameter:

Der Ordnungsparameter ist eine makroskopische Größe und beschreibt den Zustand einer Phase. Er ist charakteristisch für bestimmte Phasen und Phasenübergänge. Am einfachsten ist es Beispiele von Ordnungsparametern zu betrachten:

- Ferromagnet: spontane Magnetisierung M_S .
- Mischkristall: Konzentrationsdifferenz $\Delta x = x_B - x_A$.

Der Ordnungsparameter bringt insbesondere die Dualität der Minimierung der freien Enthalpie $G = U - TS + pV$ zum Ausdruck, nach der die Innere Energie U für tiefe Temperaturen T minimal ist während die Entropie S von hohen Temperaturen profitiert.

Korrelationslänge:

Die Korrelationslänge $\xi(T)$ ist eine im Allgemeinen temperaturabhängige Größe und beschreibt die Reichweite der Korrelation. Insbesondere lässt sich bei Kenntnis der Korrelationslänge bestimmen, ob sich entfernte Gebiete, in denen sich ein Phasenübergang vollzieht, gegenseitig beeinflussen.

Die mathematische Definition der *Korrelationsfunktion* g , die die Korrelation zweier Punkte \vec{r} , \vec{r}' bezüglich einer Größe X beschreibt, ist gegeben als

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \langle x(\vec{r}) x(\vec{r}') \rangle - \langle x(\vec{r}) \rangle \langle x(\vec{r}') \rangle, \quad (2.6)$$

wobei $x(\vec{r})$ die Dichte der Größe X am Ort \vec{r} ist. Sind die Orte \vec{r} und \vec{r}' bezüglich X unabhängig voneinander, so faktorisiert das erste Skalarprodukt in (2.6) und es folgt $g(\vec{r}, \vec{r}') = 0$.

Man kann zeigen, dass g in den kritischen Bereichen die Gestalt

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = c_0 \frac{\exp(-|\vec{r} - \vec{r}'|/\xi(T))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.7)$$

annimmt, wobei $\xi(T)$ die *Korrelationslänge* ist.

Die **Grundüberlegung der GINZBURG-LANDAU-Theorie** ist die *Potenzreihenentwicklung* der Freien Enthalpie G nach Ordnungen des Ordnungsparameters ϕ bzw. seiner Dichte ψ ,

$$\phi = \int d^3r \psi(\vec{r}) \begin{cases} = 0 & \text{für } T > T_C \\ \neq 0 & \text{für } T < T_C \end{cases} \quad (2.8)$$

Aus der Beobachtung

$$\lim_{\substack{T \rightarrow T_c \\ T < T_c}} \psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.9)$$

folgt die Rechtfertigung des Potenzreihenansatzes. Die Potenzreihendarstellung lautet dann:

$$\begin{aligned} G(T, p) &= \int d^3r g(T, \psi(\vec{r})) \\ &= \int d^3r [g_0(\vec{r}) - \pi(\vec{r}) \psi(\vec{r}) + a(T) \psi^2(\vec{r}) + b(T) \psi^4(\vec{r}) + c(T)(\nabla\psi(\vec{r}))^2], \end{aligned} \quad (2.10)$$

wobei a, b, c temperaturabhängige Funktionen sind und π eine zur Ordnungsparameterdichte ψ konjugierte Kraft darstellt und damit die Triebkraft für den Phasenübergang aufbringt.

Für den Spezialfall, dass π und ψ ortsunabhängig seien, vereinfacht sich (2.10) zu

$$\boxed{G(T, \phi) = G(T, \phi = 0) - \pi(\vec{r})\phi + \frac{1}{V}a(T)\phi^2 + \frac{1}{V^3}b(T)\phi^4}. \quad (2.11)$$

Für konkrete Systeme liefert die *Ginzburg-Landau-Theorie* einen Zugang zu den **kritischen Exponenten** und weiteren Parametern wie der **Korrelationslänge** $\xi(T)$.

3 Phasenübergänge im frühen Universum

Dieses Kapitel widmet sich Phasenübergängen in der Kosmologie. Im Gegensatz zu Phasenübergängen, die im vorherigen Kapitel als Beispiele für Phasenübergänge unterschiedlicher Ordnungen dienten, sind Phasenübergänge in der Kosmologie von spezieller Natur und zeigen sich in erster Linie durch Brechung von Symmetrien. Bevor konkrete Phasenübergänge in der Kosmologie betrachtet werden, empfiehlt sich daher ein kurzer Blick auf die Symmetriegruppen der fundamentalen Wechselwirkungen. Abschließend werden topologische Defekte betrachtet, die Relikte der symmetriebrechenden Phasenübergänge darstellen und deren Nachweis heute die prinzipiell einzige Möglichkeit der Untersuchung dieser Phasenübergänge ist.

3.1 Vorüberlegungen: Symmetriegruppen der fundamentalen Wechselwirkungen

Grundgedanke der Vereinigung der Wechselwirkungen:

Es existieren *Symmetrien* in der Natur, die im heutigen Universum gebrochen sind. Die heute beobachtbare Symmetriegruppe ist nicht die maximale Symmetriegruppe der Natur.

Nach dem *Standardmodell* der Teilchenphysik ist die heutige Symmetriegruppe des Universums:

$$\boxed{SU(3)_C \times (SU(2) \times U(1))_{EW}} \tag{3.1}$$

mit (vgl. Abb. 5)

- $SU(3)_C$: Symmetriegruppe der *starken Wechselwirkung* (C : colour),
- $(SU(2) \times U(1))_{EW}$: Symmetriegruppe der *elektroschwachen Wechselwirkung*.

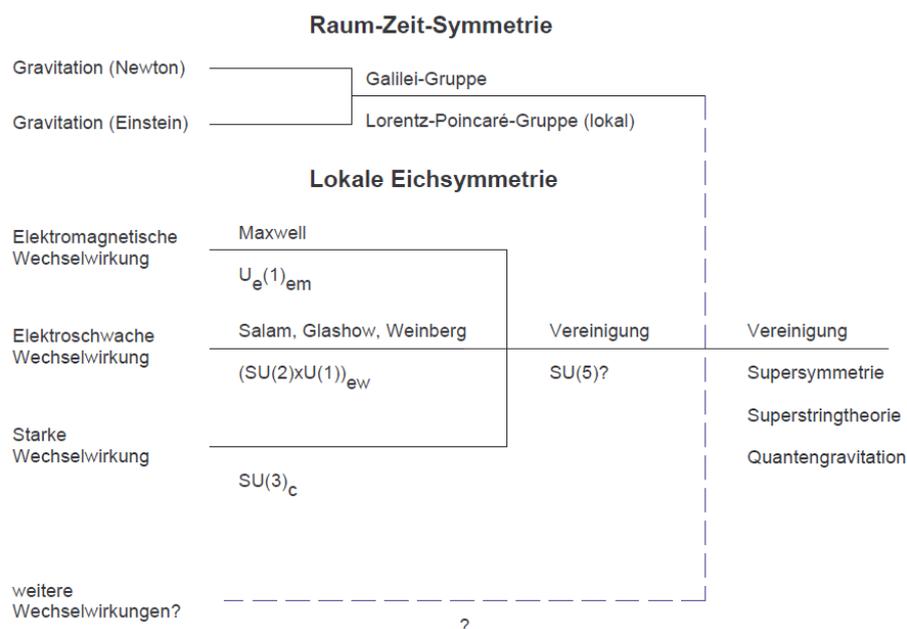


Abbildung 5: Symmetriegruppen der fundamentalen Wechselwirkungen und mögliche Vereinigungen [Fa11, S.119].

Nach dem eingangs eingeführten Ansatz ist eine höhere Symmetriegruppe zu erwarten. Dies lässt sich dadurch motivieren, dass eine exakte Symmetrie Wechselwirkungen voraussetzt, deren Eichbosonen masselos sind. Im Standardmodell der Teilchenphysik trifft die Masselosigkeit zwar auf Photonen als Vermittler der COULOMB-Wechselwirkung und die Gluonen als Vermittler der starken Wechselwirkung zu, die W- und Z-Bosonen der schwachen Wechselwirkung sind jedoch massebehaftet, weshalb eine grundsätzlich gebrochene Symmetrie induziert ist.

Welche Ansätze zu einer gültigen Vereinigung der vier fundamentalen Wechselwirkungen führen - Stichworte $SU(5)$ oder SUSY (Supersymmetrie) - ist derzeit nicht bekannt und aktuelles Forschungsthema der theoretischen Teilchenphysik. In Abb. 5 sind die fundamentalen Wechselwirkungen, ihre Symmetriegruppen, sowie mögliche Vereinigungen schematisch dargestellt. Einige Vereinigungstheorien setzen weitere Wechselwirkungen zwingend voraus, die derzeit ebenfalls nicht bekannt sind.

3.2 Spontane Symmetriebrechung

Da Phasenübergänge im frühen Universum die ursprünglich exakten Symmetrien brechen, beschäftigt sich dieses Kapitel mit den Mechanismen von spontaner Symmetriebrechung (SSB). Dazu soll zunächst ein einfaches Modell betrachtet werden. Anschließend soll präsentiert werden wie die Symmetrie bei hohen Temperaturen wiederhergestellt werden kann.

3.2.1 Ein einfaches Modell

Es soll eine LAGRANGE-Dichte,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.2)$$

eines Systems im Potential,

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4, \quad (3.3)$$

betrachtet werden. Die LAGRANGE-Dichte \mathcal{L} ist dabei invariant unter Inversion $\phi \rightarrow -\phi$. Das Potential V besitzt die folgenden Extremstellen (vgl. Abb. 6):

$$\text{Minima: } \phi = \sigma_\pm = \pm \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, \quad (3.4)$$

$$\text{Maximum: } \phi = 0. \quad (3.5)$$

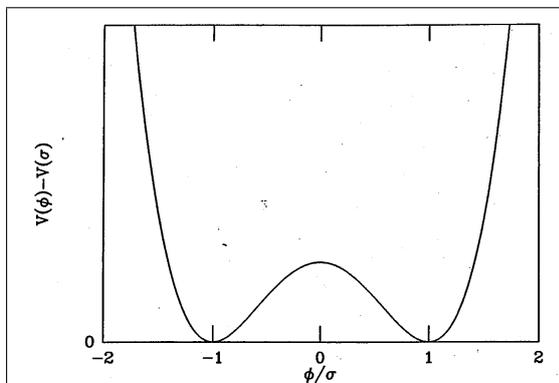


Abbildung 6: Potential $V(\phi)$ aus (3.3) [KT90, S.196].

Für eine physikalisch mathematische Beschreibung eines Systems in diesem Potential V ist die Entwicklung der Theorie um einen stabilen Grundzustand notwendig. Die möglichen Grundzustände im Potential V sind die Extremstellen; jedoch sind nur die Minima stabile Grundzustände. Der instabile Grundzustand für $\phi = 0$ erfüllt nicht die Anforderungen obwohl er die Symmetrien der LAGRANGE-Dichte erfüllt. Eine Entwicklung kann also nur um $\phi = \sigma_+$ oder $\phi = \sigma_-$ erfolgen. Diese beiden äquivalenten Grundzustände erfüllen jedoch nicht die Symmetrie der LAGRANGE-Dichte.

Man spricht nun von *spontaner Symmetriebrechung* (SSB), wenn ein System im Ausgangszustand $\phi = 0$ bei seiner Evolution einen stabilen

Grundzustand einnimmt, der die Symmetrie der LAGRANGE-Dichte \mathcal{L} nicht erfüllt. Für einen diskontinuierlichen Phasenübergang ist eine solche Symmetriebrechung bei Evolution des Potentials in Abb. 7 gezeigt: Für hohe Temperaturen besitzt das Potential die Symmetrie der LAGRANGE-Dichte. Bei fallenden Temperaturen kommt es zunächst unter Ausbildung einer Potentialbarriere zum Auftreten eines weiteren Potentialminimums. Für eine kritische Temperatur T_C sind die möglichen Grundzustände äquivalent und durch eine Potentialbarriere getrennt. Über den *Tunneleffekt* kann es nun zum Übergang kommen. Für tiefe Temperaturen $T \rightarrow 0$ geht das Potential in die Form aus Abb. 6 mit $\phi = 0$ als nun instabilen Grundzustand über.

Aus der *Krümmung* der Potentialkurve an den entsprechenden Grundzuständen kann man die *Masse* eines Bosons, das durch die KLEIN-GORDON-Gleichung mit dem Potential V beschrieben wird ermitteln:

$$M^2 = \left. \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} V(\phi) \right|_{\sigma_{\pm}} = 2m^2 = 2\lambda\sigma_{\pm} \quad (3.6)$$

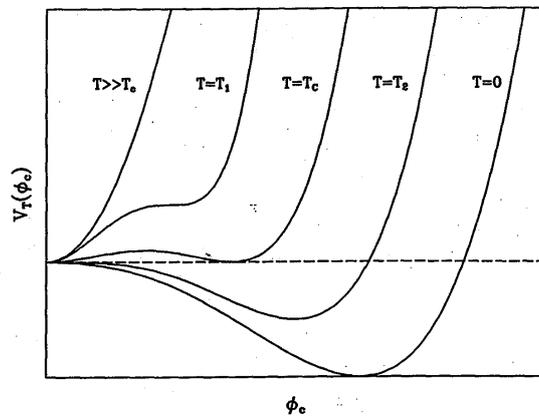


Abbildung 7: Temperaturabhängigkeit des Potentials $V(\phi)$ in (3.2) [KT90, S.200].

3.2.2 Wiederherstellung der Symmetrie bei hohen Temperaturen

Eine Wiederherstellung der Symmetrie bei hohen Temperaturen lässt sich erreichen durch ein Umschreiben des Potentials $V(\phi)$. Aus dem Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \mathcal{L} g_{\mu\nu} \quad (3.7)$$

kann eine *Energiedichte* abgeleitet werden:

$$\Rightarrow \langle T_{00} \rangle = -\frac{m^4}{4\lambda} \equiv \rho_V. \quad (3.8)$$

Aus den Daten für die Expansion des Universums lässt sich eine Obergrenze für die Energiedichte angeben:

$$\rho_V < 10^{-46} \text{GeV}^4. \quad (3.9)$$

Für die Näherung $\rho_V \rightarrow 0$ lässt sich ein Zusatzterm $(+\frac{m^4}{4\lambda})$ ins Potential einbinden, der $\rho_V \rightarrow 0$ gewährleistet, so dass für das Potential nun folgt:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \sigma^2)^2. \quad (3.10)$$

Eine Konstruktion einer physikalischen Theorie um den Grundzustand $\langle \phi \rangle = 0$ liefert dann eine Masse der Bosonen von

$$M^2 = V''(\phi = 0) = -\lambda\sigma^2. \quad (3.11)$$

Die Lösungen zur LAGRANGE-Dichte zeigen dann ein exponentielles Maximum in Richtung des stabilen Minimums und eine Wechselwirkung mit dem Wärmebad liefert eine Dämpfung. Man kann eine *Plasmamasse* einführen

$$m_{\text{Plasma}}^2 = a \lambda T^2, \quad (3.12)$$

so dass die Masse für $\phi = 0$ die folgende Temperaturabhängigkeit besitzt:

$$m_T^2 = -\lambda\sigma^2 + m_{\text{Plasma}}^2 = \lambda(aT^2 - \sigma^2). \quad (3.13)$$

Nun zeigt sich

$$m_T^2 < 0 \Rightarrow m_T \in \mathbb{C} \rightarrow \langle \phi \rangle = 0 \text{ ist instabiler Grundzustand,}$$

$$m_T^2 > 0 \Rightarrow m_T \in \mathbb{R} \rightarrow \langle \phi \rangle = 0 \text{ ist stabiler Grundzustand.}$$

Es existiert also eine *kritische Temperatur* T_C ,

$$T_C = \frac{\sigma}{\sqrt{a}} \Rightarrow m_T^2 = 0, \quad (3.14)$$

so dass für $T > T_C$ die Symmetrie wiederhergestellt ist. Konkret lässt sich dies an Abb. 7 verdeutlichen:

$T \gg T_C$: wiederhergestellte Symmetrie,

$T = T_C$: Ausbildung einer Potentialbarriere,

$T = 0$: vollständig gebrochene Symmetrie.

3.3 Der elektroschwache Phasenübergang

Der elektroschwache Phasenübergang ist ein Phasenübergang, der in der Kosmologie für eine Temperatur von ungefähr $T \approx 200\text{GeV}$ angenommen wird. Er beschreibt die elektroschwache Symmetriebrechung:

$$\boxed{(SU(2) \times U(1))_{EW} \longrightarrow U(1)_{EM}}. \quad (3.15)$$

Eine Betrachtung dieses Phasenübergangs führt auf den **HIGGS-Mechanismus**. Ausgangspunkt ist ein $SU(2)_W$ - Dublett, das HIGGS-Feld:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi + i\phi_3 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Das Potential V sei nur von $\Phi^+\Phi$ abhängig und habe die Form (vgl. Abb. 8)

$$V(\Phi) = -m^2\Phi^+\Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2. \quad (3.17)$$

Aufgrund der Symmetrie des Potentials reicht es aus eine vereinfachte Form zu betrachten:

$$\boxed{V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad \langle \phi \rangle = \sigma} \quad (3.18)$$

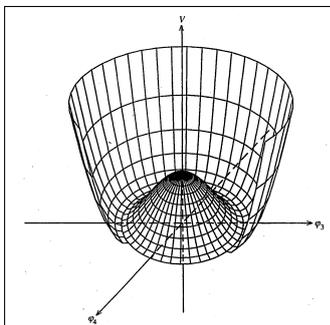


Abbildung 8: Potential aus (3.17) [Ro03, S.170].

Durch den HIGGS-Mechanismus erfolgt eine *Massenzuordnung* für W- und Z-Bosonen der schwachen Wechselwirkung und der Fermionen:

$$M_W^2 = \frac{1}{4}g^2\sigma^2, \quad (3.19)$$

$$M_Z^2 = \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)\sigma^2, \quad (3.20)$$

$$M_f^2 = \frac{1}{2}h_f^2\sigma^2, \quad (3.21)$$

wobei g, g' die Kopplungskonstanten der $SU(2)$ bzw. der $U(1)$ -Symmetriegruppe sind und h_f die YUKAWA-Kopplungskonstante der Fermionen ist.

Das HIGGS-Potential hat dann bei $T = 0$ die Form

$$\begin{aligned} V(\phi_c) &= -\frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_c^4 \\ \text{skalare Loops:} &+ \frac{1}{64\pi^2}(-m^2 + 3\lambda\phi_c^2)^2 \ln\left(\frac{-m^2 + 3\lambda\phi_c^2}{\mu^2}\right) \\ \text{Eichbosonen:} &+ \frac{3}{1024\pi^2}[2g^4 + (g^2 + g'^2)^2] \phi_c^4 \ln\left(\frac{\phi_c^2}{\mu^2}\right) \\ \text{Fermionen:} &- \frac{3}{64\pi^2}h_f^4\phi_c^4 \ln\left(\frac{\phi_c^2}{\mu^2}\right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Vereinfachend ergibt sich bei Vernachlässigung der skalaren Loops und für kleine HIGGS-Massen ($\leq 100\text{GeV}$)

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}(2B + \lambda)\sigma^2\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_c^4 + B\phi_c^4 \ln\left(\frac{\phi_c^2}{\sigma^2}\right) \quad (3.23)$$

und aus der *Krümmung* die HIGGS-Masse:

$$M^2 = V''(\sigma) = 2(\lambda + 6B)\sigma^2. \quad (3.24)$$

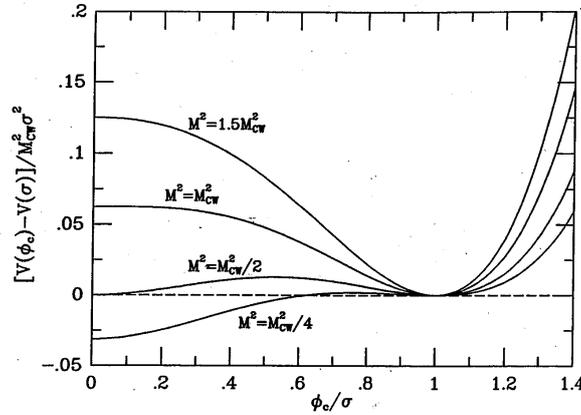


Abbildung 9: $V(\phi)$ für unterschiedliche HIGGS-Massen [KT90, S.210].

Abb. 9 zeigt das HIGGS-Potential für unterschiedliche HIGGS-Massen in Einheiten der COLEMAN-WEINBERG-Masse $M_{CW} \approx 9\text{GeV}$. Man erkennt für $M^2 < M_{CW}^2$ ein Minimum bei $\phi_c = 0$, was auf einen diskontinuierlichen Phasenübergang hindeutet. Für $M^2 = M_{CW}^2/2$ erkennt man deutlich die Potentialbarriere. Damit ein Phasenübergang mit spontaner Symmetriebrechung vorliegt, muss $V(0) > V(\sigma)$ erfüllt sein.

Für einen Phasenübergang benötigt man ein temperaturabhängiges HIGGS-Potential. Dieses ist durch

$$\begin{aligned} V_T(\phi_c) = V(\phi_c) + \frac{T^4}{2\pi^2} \left\{ 6F_+ \left[g^2 \frac{\phi_c^2}{4} \right] + 3F_+ \left[(g^2 + g'^2) \frac{\phi_c^2}{4} \right] \right. \\ \left. + F_+ [M^2(\phi_c)] + 12F_- \left[h_t^2 \frac{\phi_c^2}{4} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

gegeben, wobei F_+ Bosonen Loops und F_- Fermionen Loops bezeichnen:

$$F_{\pm}[X(\phi_c)] \equiv \pm \int_0^{\infty} dx x^2 \ln \left[1 \mp \exp \left\{ - \left(\frac{x^2 + X(\phi_c)}{T^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right]. \quad (3.26)$$

Unzulänglichkeiten des getroffenen Ansatzes:

Nach dem hier verwendeten Ansatzes erwartet man für die elektroschwache Symmetriebrechung einen Phasenübergang von schwach erster Ordnung. Da jedoch die HIGGS-Masse kleiner als 100GeV angenommen wurde und neuere Erkenntnisse diese im Bereich von $M > 114\text{GeV}$ vermuten, ist klar, dass der elektroschwache Phasenübergang kein Phasenübergang erster Ordnung ist, sondern eher die Charakteristik eines *cross over* zeigt.

3.4 Phasenübergang der Quantenchromodynamik (QCD)

Ein weiterer Phasenübergang in der Kosmologie ist der Phasenübergang in der Quantenchromodynamik. Dieser bricht die chirale Symmetrie der *starken Wechselwirkung*. Er führt zum Ausfrieren der Quarks und Gluonen, dem sogenannten *Confinement* und wird bei etwa $T \approx 200\text{MeV}$ vermutet.

3.5 Topologische Defekte

Als *topologische Defekte* bezeichnet man Rückstände der Phasenübergänge in der Kosmologie, die im Prinzip auch heute noch beobachtbar sind.

3.5.1 Domain Walls

Die betrachteten diskontinuierlichen Phasenübergänge besitzen unterschiedliche stabile Grundzustände σ_{\pm} . Die Einnahme eines stabilen Grundzustands bei der Phasenumwandlung kann nun in unterschiedlichen Grundzuständen resultieren, wenn die betroffenen Gebiete weiter als eine Korrelationslänge voneinander entfernt sind. Sind diese Grundzustände nun unterschiedlich, so nehmen benachbarte Gebiete stabile Phasen mit unterschiedlichen Grundzuständen ein. Diese Phasen sind dann voneinander durch sogenannte *Domain Walls* getrennt (vgl. Abb. 10).

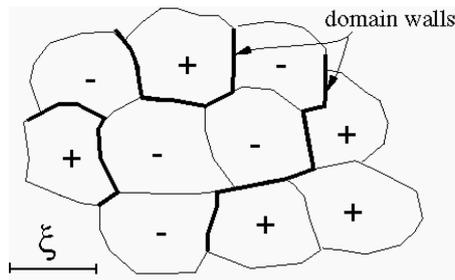


Abbildung 10: Veranschaulichung von *Domain Walls*.

3.5.2 Cosmic Strings

Kosmische Strings sind ähnliche Strukturen wie die zuvor betrachteten *Domain Walls*, nur dass diese Strings eindimensionale, extrem massereiche Strukturen sind; auch sie trennen Gebiete unterschiedlicher Grundzustände. Prinzipiell können sowohl unendlich ausgedehnte als auch geschlossene Strings existieren. Geschlossene Strings können sich zu einem Punkt zusammenziehen. Abb. 11 zeigt eine Simulation von kosmischen Strings in einem abgeschlossenen Volumen.

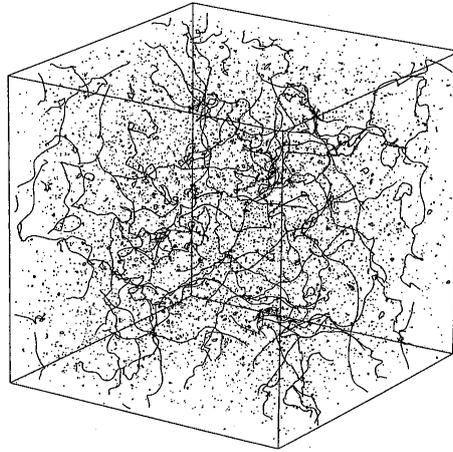


Abbildung 11: Kosmische Strings [KT90, S.227].

3.5.3 Magnetische Monopole

Von einigen Vereinheitlichungstheorien werden *magnetische Monopole* (vgl. Abb. 12) zwingend vorausgesetzt. Sie können einer Brechung der $O(3)$ -Symmetrie entstammen. Es sei als Hinweis erwähnt, dass magnetische Monopole den MAXWELL'schen Gleichungen nicht widersprechen, wenn diese in symmetrischer Form formuliert werden.

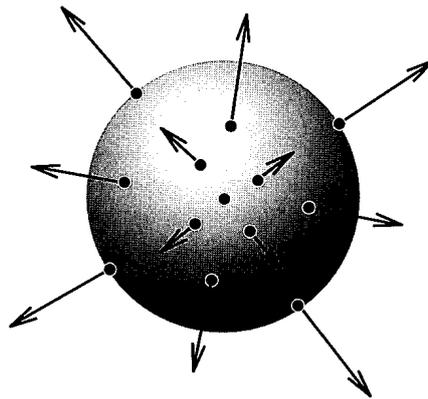


Abbildung 12: *Hedgehog*-Konfiguration eines magnetischen Monopols [Li90, S.126].

4 Zusammenfassung

- Es existieren diskontinuierliche und kontinuierliche Phasenübergänge in der Physik (vgl. Phasenübergänge in erster und zweiter Ordnung nach EHRENFEST).
- Das Verhalten der freien Enthalpie $G = U - TS + pV$ bestimmt die Phasenumwandlung durch das Wechselspiel zwischen Entropiemaximierung und Minimierung der inneren Energie.
- Die GINZBURG-LANDAU-Theorie der Phasenübergänge gibt eine Möglichkeit der Beschreibung der freien Enthalpie im Phasenumwandlungsgebiet.
- Phasenübergänge im frühen Universum liefern Lösungen für gebrochene Symmetrien in der Natur (vgl. elektroschwache Symmetriebrechung).
- Brechung einer Symmetrie ordnet Eichbosonen Masse zu (vgl. HIGGS-Mechanismus).
- Phasenübergänge im frühen Universum hinterlassen Spuren, die jedoch bisher nicht beobachtet werden konnten. Beispielsweise Domain Walls, kosmische String und magnetische Monopole.

Literatur

- [BG06] L. Bergström, A. Goobar, *Cosmology and Particle Astrophysics*, Springer, Berlin (2006)
- [Fa11] C. Falter, Vorlesung und Skript: *Symmetrie und Physik*, Münster (2011)
- [KT90] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, Massachusetts (1990)
- [Li90] A. Linde, *Elementarteilchen und inflationärer Kosmos*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1990)
- [No04] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 4 - Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*, Springer, Berlin (2005)
- [No06] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 6 - Statistische Physik*, Springer, Berlin (2007)
- [Ro03] M. Roos, *Introduction to Cosmology*, John Wiley & Sons, Chichester (2003)