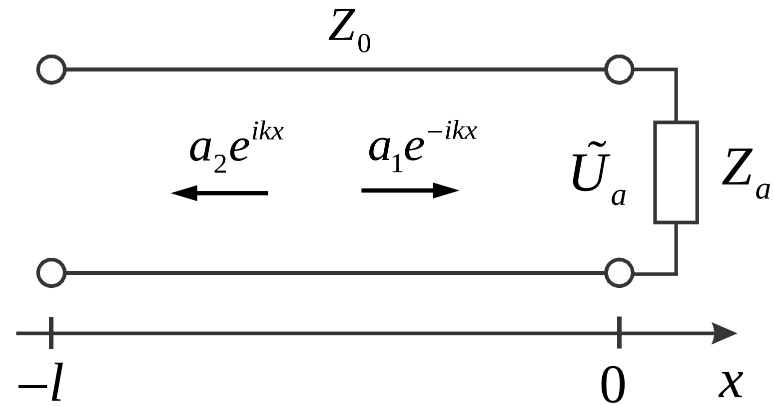
Reflexion. Stehwellen.

$$\tilde{U} = a_1 e^{-ikx} + a_2 e^{+ikx} \qquad \tilde{I} = (a_1 e^{-ikx} - a_2 e^{+ikx}) / Z_0$$



Bei x=0 (Ausgang): $\tilde{U}_a = a_1 + a_2$

und $\tilde{I}_a = (a_1 - a_2) / Z_0$

Andererseits ist an dem Abschlusswiderstand Z_a: $\tilde{I}_a = \tilde{U}_a / Z_a = \left(a_1 + a_2\right) / Z_a$

Daher besteht die Beziehung $a_1 + a_2 = \dfrac{Z_a}{Z_0}(a_1 - a_2)$ oder $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0}$

Die rücklaufende Welle (a_2) entsteht durch die Reflexion der hinlaufende Welle (a_1) am Leitungsende.

Das Verhältnis zwischen a_2 und a_1 wird *Reflexionsfaktor* genannt: $\boxed{r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0}}$

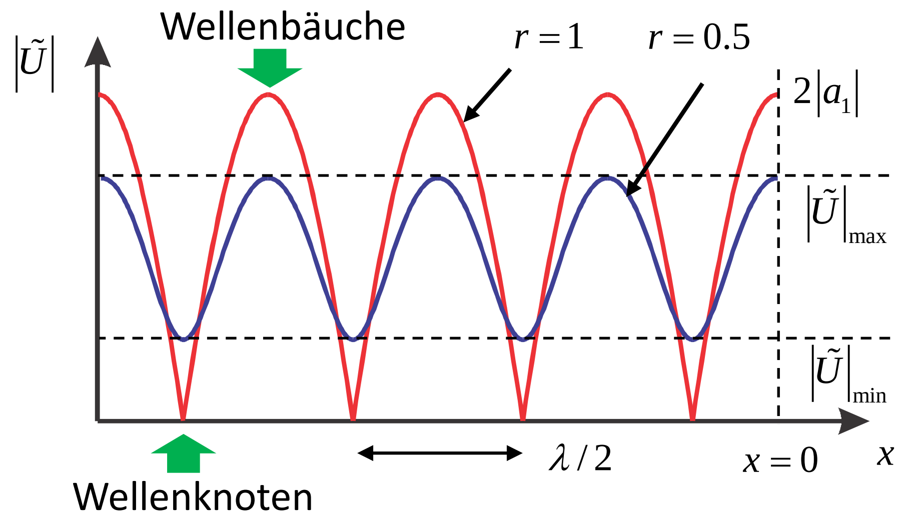
Die Reflexion verschwindet (r=0) bei Abschluss des Kabels mit dem Wellenwiderstand: $Z_a = Z_0$.

Ist r=0, fließt die Energie vollständig in den Lastwiderstand.

Reflexionsfaktor ist im Allgemeinen komplex: $r = |r| e^{i\phi}$

Interferenz der hin- und rücklaufende Wellen führt zur Bildung einer *Stehwelle*

Die Spannungsamplitude auf der Leitung : $\tilde{U} = a_1 e^{-ikx} + a_1 |r| e^{i\phi} e^{+ikx} \quad \Rightarrow \quad |\tilde{U}| = |a_1| \sqrt{1 + |r|^2 + 2|r|\cos(2kx + \phi)}$



Die Spannung in der Stehwelle oszilliert im Raum mit der Periode

$$2k\Delta x = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \pi / k = \lambda / 2$$

Die Extremwerte:

$$|\tilde{U}|_{max} = |a_1|(1 + |r|) \qquad |\tilde{U}|_{min} = |a_1|(1 - |r|)$$

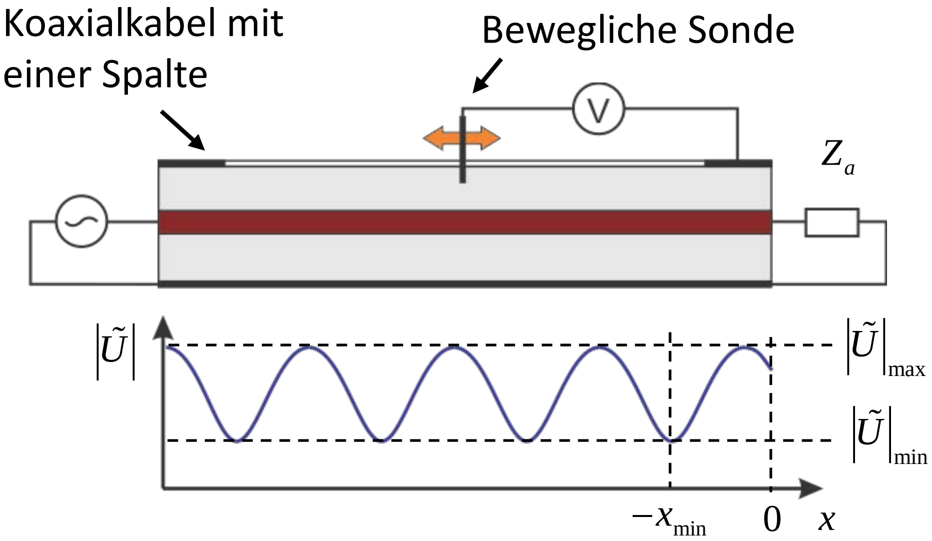
Die Lage der Extrema ändert sich nicht mit der Zeit – „Stehwelle“

Totale Reflexion (*r*=1): $|\tilde{U}| = |a_1| \sqrt{2(1 + \cos(2kx))} = |a_1| \sqrt{2(2\cos^2(kx))} = 2|a_1||\cos(kx)|$

Die Extremwerte: $|\tilde{U}|_{min} = 0 \quad |\tilde{U}|_{max} = 2|a_1|$

Der Quotient $\boxed{S = \dfrac{|\tilde{U}|_{max}}{|\tilde{U}|_{min}} = \dfrac{1 + |r|}{1 - |r|}}$ bezeichnet man als *Stehwellenverhältnis*.

VSWR – voltage standing wave ratio



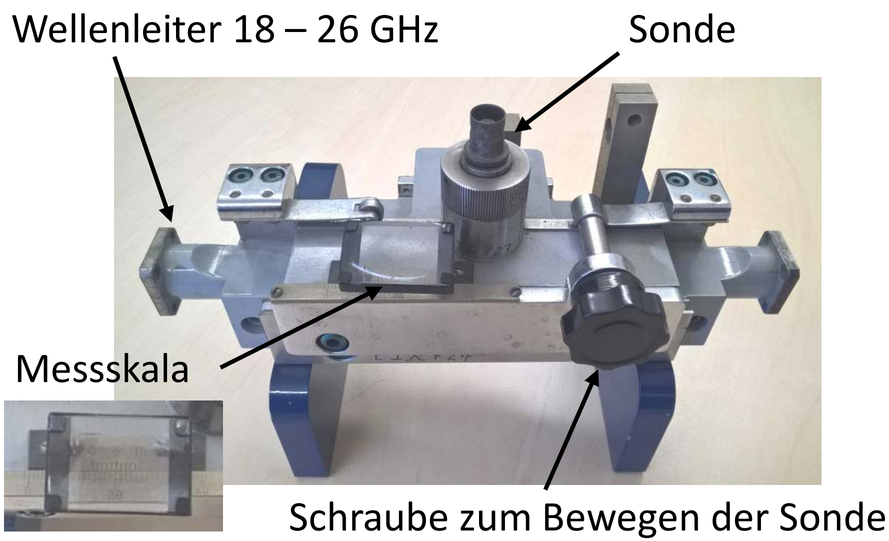
Stehwellenverhältnis kann mit Hilfe vom Stehwellenmessgerätes direkt gemessen werden.

Aus der Messung von S lässt sich $|r|$ bestimmen, während man φ aus der Lage der Extrema bestimmen kann.

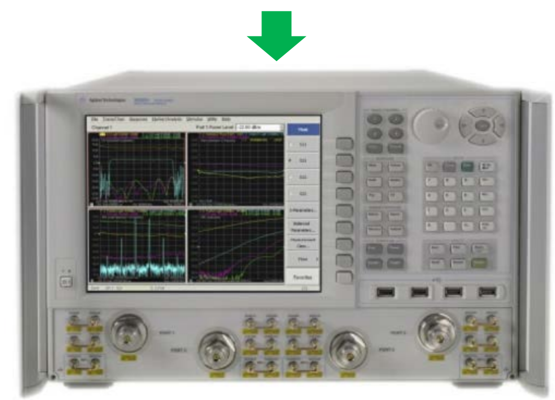
Die Lage des 1. Minimums entspricht:

$$-2kx_{\min} + \phi = \pi \quad \Rightarrow \quad \phi = 2kx_{\min} + \pi$$

Diese Methode der Stehwellenmessung zur Bestimmung von Reflexionsfaktoren wurde früher intensiv angewendet.



Heute werden Reflexionsfaktoren elektronisch mit Hilfe von Netzwerkanalysatoren gemessen.

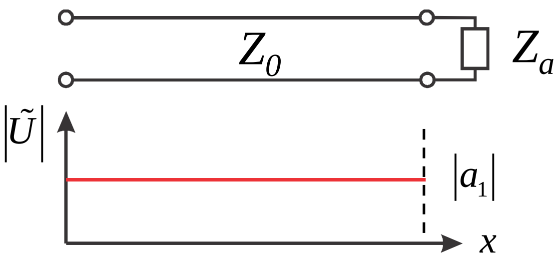


Spezialfälle

$$r = |r| e^{i\phi} = \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0}$$

$$S = \frac{1+|r|}{1-|r|}$$

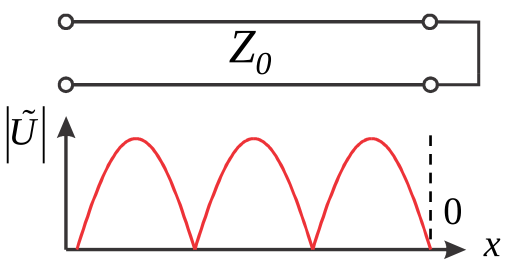
1. Anpassung: $Z_a = Z_0$



$r=0$ $\quad$ $S = (1+|r|)/(1-|r|) = 1$

Die hinlaufende Welle läuft in den Abschlusswiderstand hinein, ohne dass eine reflektierte Welle entsteht.

2. Kurzschluss: $Z_a = 0$



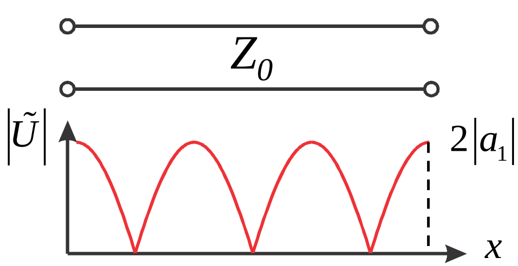
$$r = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0}$$

$|r|=1$ $\quad$ $\phi=\pi$ $\quad$ $S=\infty$

Die hinlaufende Welle wird vollständig am Leitungsende reflektiert. Die gesamte Energie der Welle läuft zurück.

Die Spannung am Ende der Leitung ist gleich Null.

3. Leerlauf: $Z_a \to \infty$



$$r = \frac{\infty - Z_0}{\infty + Z_0}$$

$|r|=1$ $\quad$ $\phi=0$ $\quad$ $S=\infty$

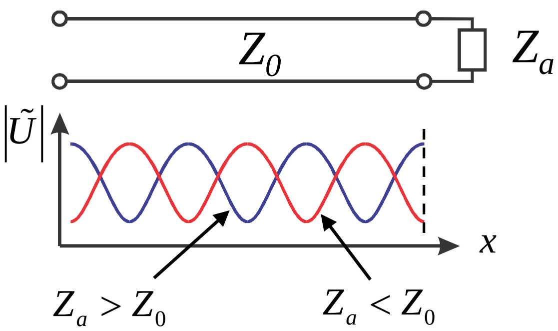
Die hinlaufende Welle wird vollständig am Leitungsende reflektiert. Die gesamte Energie der Welle läuft zurück.

Die Spannung am Ende der Leitung zeigt den Extremwert $2|a_1|$

Spezialfälle

$$r = |r| e^{i\phi} = \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0} \qquad S = \frac{1+|r|}{1-|r|}$$

4. Wirkwiderstand : $Z_a \neq Z_0$



$Z_a > Z_0$ ➡ $r \in Z \quad r > 0$ ➡ ϕ=0

$Z_a < Z_0$ ➡ $r \in Z \quad r < 0$ ➡ ϕ=π

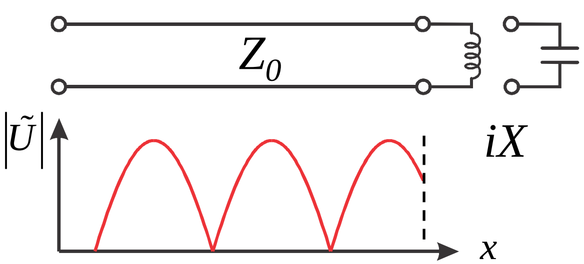
Beim Wirkabschlusswiderstand ist die Phase des Reflexionsfaktors entweder 0 oder π (gilt auch für eine Verbindung zwischen zwei Linien mit unterschiedlichen aber reellen Impedanzen).

Zum Vergleich:

Wenn ein Lichtstrahl an einem Medium reflektiert wird, dessen Brechungsindex größer ist als der des ursprünglichen Mediums, dann ändert sich die Phase der Welle um π.

5. Reaktiver Abschluss : $Z_a = iX$ z.B. $iX = i\omega L$ oder $iX = 1/(i\omega C)$

$$r = \frac{iX - Z_0}{iX + Z_0}$$

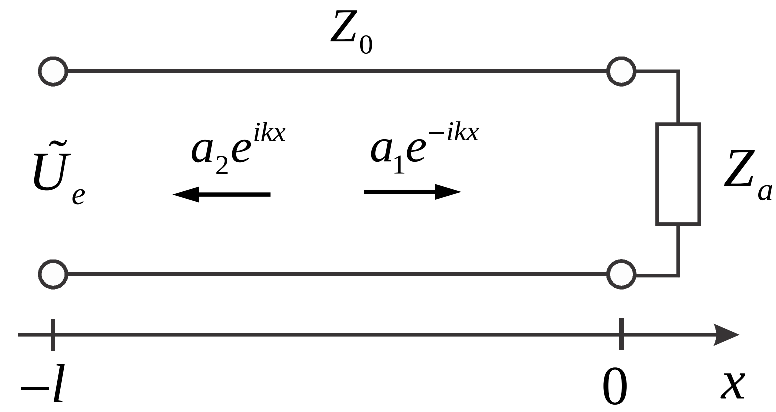


Für reellen Leitungswellenwiderstand Z_0 gilt:

$$|r| = 1 \qquad \phi = 2\arctan(Z_0 / X)$$

Die Welle wird vollständig reflektiert, aber mit einer Phasendrehung ϕ (frequenzabhängig).

34.3 Impedanztransformation



Am Eingang des Kabels gilt:

$$\tilde{U}(-l) = a_1\left(e^{ikl} + re^{-ikl}\right)$$

$$\tilde{I}(-l) = \frac{a_1}{Z_0}\left(e^{+ikl} - re^{-ikl}\right)$$

Damit ergibt sich für den (scheinbaren) Eingangswiderstand

$$Z_e = \frac{\tilde{U}(-l)}{\tilde{I}(-l)} = Z_0 \frac{e^{+ikl} + re^{-ikl}}{e^{+ikl} - re^{-ikl}}$$

Wir verwenden $r = \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0}$ und erhalten

$$\boxed{Z_e = Z_0 \frac{Z_a + iZ_0 \tan(kl)}{Z_0 + iZ_a \tan(kl)}}$$

Aus der Messung von Z_e bei bekannten Kabeleigenschaften kann man den Abschlusswiderstand Z_a bestimmen.

Unter anderem hängt der Eingangswiderstand von der Länge der Leitung ab.
Die Abhängigkeit ist nicht monoton, sondern periodisch.

$$Z_e = Z_0 \frac{Z_a + iZ_0 \tan(kl)}{Z_0 + iZ_a \tan(kl)}$$

Spezialfälle

1. Anpassung: $Z_a = Z_0 \quad \Rightarrow \quad Z_e = Z_a$

Der Abschlusswiderstand transformiert sich unverändert an den Anfang der Leitung.

2. λ/4–Leitung: $l = \frac{\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad kl = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan(kl) \to \infty \quad \Rightarrow \quad Z_e = \frac{Z_0^2}{Z_a}$

Eine λ/4 –Leitung führt zu einer *Impedanzinversion.*

z.B.: ein Kurzschluss ($Z_a = 0$) wird in einen Leerlauf ($Z_a \to \infty$) umgewandelt (und umgekehrt).

Eine λ/4–Leitung lässt sich auch zur Impedanzanpassung verwenden.

3. λ/2–Leitung: $l = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad kl = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \pi \quad \Rightarrow \quad \tan(kl) = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_e = Z_a$

unabhängig von Z_0

Einfluss des Kabels verschwindet !

4. Kurzschluss

$$Z_a = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_e = Z_0 \frac{iZ_0 \tan(kl)}{Z_0} = iZ_0 \tan(kl)$$

Am kurzgeschlossenen Kabel endlicher Länge ist der Eingangswiderstand rein imaginär.

$$Z_e = Z_0 \frac{Z_a + iZ_0 \tan(kl)}{Z_0 + iZ_a \tan(kl)}$$

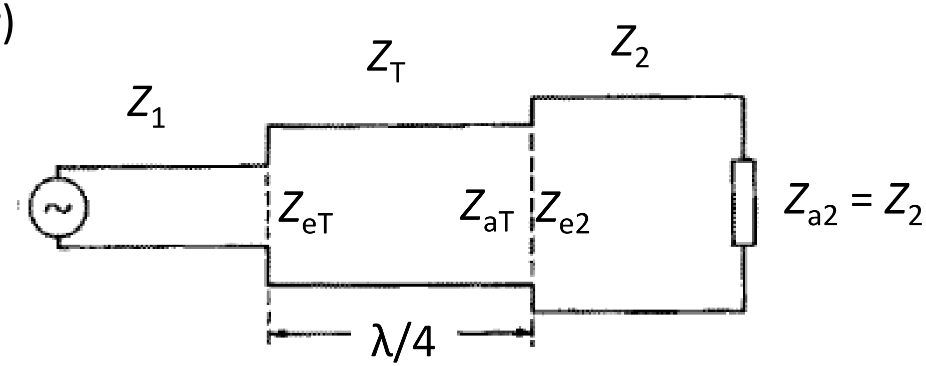
5. Leerlauf

$$Z_a = \infty \quad \Rightarrow \quad Z_e = Z_0 \frac{Z_a}{iZ_a \tan(kl)} = -i \frac{Z_0}{\tan(kl)}$$

Am offenen und am kurzgeschlossenen Kabel endlicher Länge ist der Eingangswiderstand rein imaginär. Keine Leistung wird aufgenommen!!!

34.5 Impedanzanpassung (λ/4 Transformator)

In der Elektronik werden die Wellen beim Übergang zwischen unterschiedlichen Wellenimpedanzen reflektiert (Energieverluste).



Problem: reflexionsfreie Anpassung einer Leitung mit dem Wellenwiderstand Z_1 an eine Leitung mit dem Wellenwiderstand Z_2.

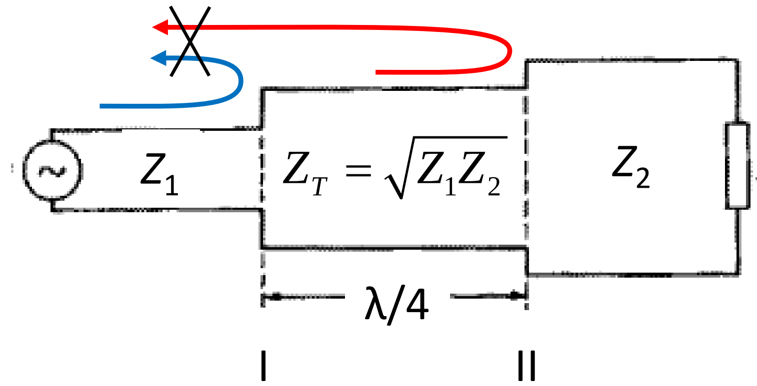
Lösung: ein Transformator aus einer λ/4–Leitung mit dem Wellenwiderstand: $Z_T = \sqrt{Z_1 Z_2}$

$Z_{a2} = Z_2 \;\Rightarrow\; Z_{aT} = Z_{e2} = Z_2$ Für eine λ/4–Leitung gilt: $Z_{eT} = Z_T^2 / Z_{aT}$

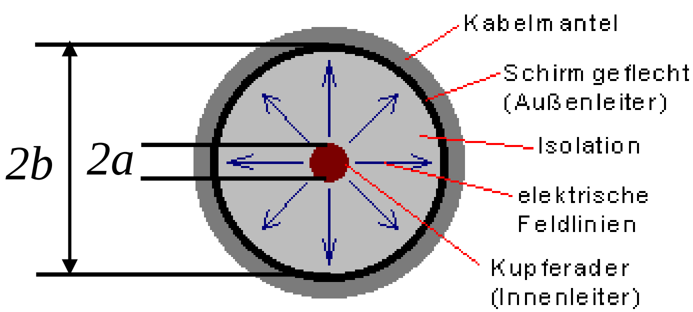
$Z_{eT} = Z_T^2 / Z_{aT} = \left(\sqrt{Z_1 Z_2}\right)^2 / Z_2 = Z_1$ damit ist das Kabelstück 1 reflexionsfrei abgeschlossen

Der λ/4 Transformator funktioniert wie eine Antireflexbeschichtung in der Optik:

Die Wellen werden teilweise an den Stellen I und II reflektiert. Da die reflektierten Wellen einen Phasenunterschied von λ/2 haben, kommt es zu einer Auslöschung der reflektierten Welle.



Die Energie fliest vollständig zum Lastwiederstand.

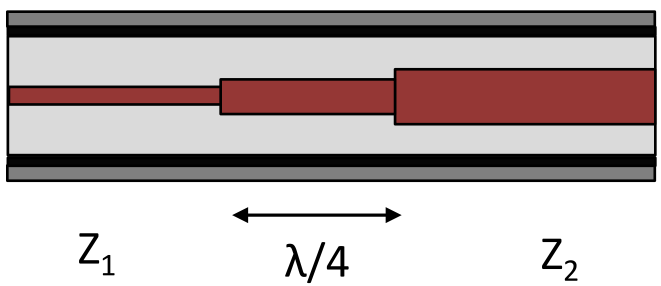


Da der Wellenwiderstand eines Koaxialkabels von *a* abhängig ist

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}\ln\frac{b}{a}$$

kann der λ/4 Transformator direkt in die Koaxialleitung integriert werden.

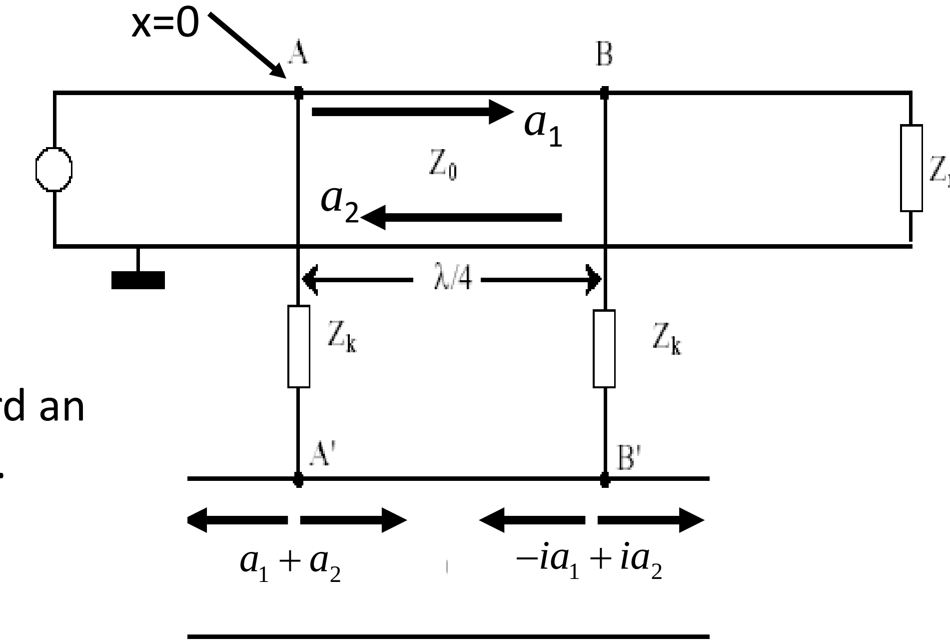
Auf diese Weise können zwei unterschiedliche Kabel reflexionsfrei verbunden werden.



– Impedanztransformator 50 auf 75 Ohm (50 und 75 Ohm sind zwei Standardwiderstände in der Hochfrequenztechnik)

34.6 Richtkoppler

$$\tilde{U} = a_1 e^{-ikx} + a_2 e^{+ikx}$$



Problem: Die Amplituden der vorlaufenden und rücklaufenden Welle sollen getrennt erfasst werden.

Die Leitung, an der gemessen werden soll, wird an den Stellen A und B im Abstand λ/4 angezapft.

$$\tilde{U}_A(x=0) = a_1 + a_2$$

$$\tilde{U}_B(x=\lambda/4) = a_1 e^{-i\pi/2} + a_2 e^{+i\pi/2} = -ia_1 + ia_2$$

Dadurch koppelt man an den Stellen A' und B' das Signal in einen zweiten Leiter ein. An den Stellen A' und B' entstehen jeweils eine nach links und eine nach rechts laufende Welle.

Die von A' nach *rechts* laufende Welle auf dem Weg zu B' bekommt eine zusätzliche Phase -*i*

Daraus folgt die Gesamtamplitude an der Stelle B' für die nach rechts laufende Welle:

$$\tilde{U}_r = \underbrace{-i(a_1 + a_2)}_{A \to B'} + \underbrace{(-ia_1 + ia_2)}_{B \to B'} = -2ia_1$$

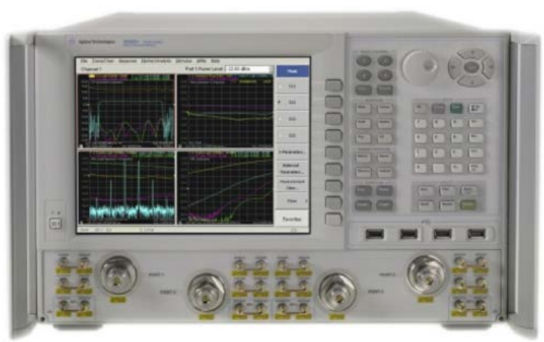
Die von B' nach *links* laufende Welle auf dem Weg zum A' bekommt eine zusätzliche Phase -*i*

Daraus folgt die Gesamtamplitude an der Stelle A' für die nach links laufende Welle:

$$\tilde{U}_l = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{A \to A'} + \underbrace{-i(-ia_1 + ia_2)}_{B \to A'} = 2a_2$$

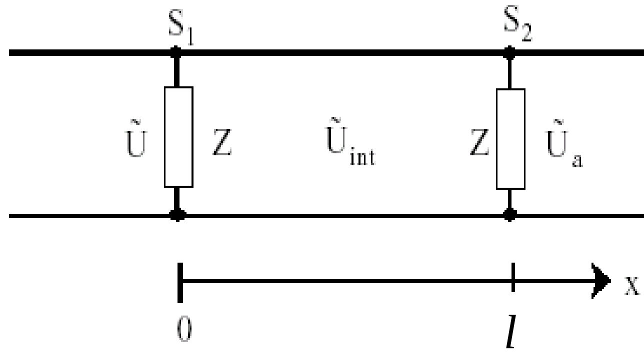
Koaxialrichtkoppler 0.5 - 2 GHz.

Wellenleiterrichtkoppler 18 - 26 GHz.



Richtkoppler werden in Netzwerkanalysatoren benutzt um die Amplituden und die Phasen der vorlaufenden und der rücklaufenden Welle getrennt zu messen. Sie erlauben die elektronische Messung des Reflexionsfaktors.

34.6 Mehrfache Reflektion



Betrachten wir zwei Stellen (S_1 und S_2), an denen die Welle teilweise reflektiert wird.

An der Stelle S_1 wird von der nach rechts (”forward”) laufenden Welle mit der komplexen Amplitude $\tilde{U}$ ein Teil reflektiert und der Teil $\tilde{U}_1^f(0) = t_1\tilde{U}$ transmittiert.

Daraus wird an der Stelle S_2: $\tilde{U}_1^f(l) = t_1\tilde{U}e^{-ikl}$

Hier wird ein Teil transmittiert $\tilde{U}_1^t(l) = t_2 t_1\tilde{U}e^{-ikl}$ und ein Teil nach links zurück (”backward”) reflektiert $\tilde{U}_1^b(l) = r_2 t_1\tilde{U}e^{-ikl}$

Nach dem Rücklauf zur Stelle S_1 und Reflexion mit dem Reflexionsverhältnis r_1 wird daraus: $\tilde{U}_2^f(0) = r_1 r_2 t_1\tilde{U}e^{-2ikl}$ und der Vorgang wiederholt sich.

Die zweite transmittierte Welle: $\tilde{U}_2^t(0) = r_1 r_2 t_1 t_2\tilde{U}e^{-3ikl}$

Die Gesamtamplitude der transmittierten Welle ergibt sich aus der Überlagerung der Teilwellen:

$$\tilde{U}^t(x) = \tilde{U}_1^t + \tilde{U}_2^t + \tilde{U}_3^t + ... = t_1 t_2\tilde{U}e^{-ikx}\left(1 + r_1 r_2 e^{-2ikl} + \left(r_1 r_2 e^{-2ikl}\right)^2 + ...\right) = \frac{t_1 t_2\tilde{U}e^{-ikx}}{1 - r_1 r_2 e^{-2ikl}}$$

Konvergente Reihe

Mit $r_1 = |r_1| e^{i\varphi_1}$ $r_2 = |r_2| e^{i\varphi_2}$ wird die Leistung P_a rechts von S_2:

$$\boxed{\tilde{U}^t(x) = \frac{t_1 t_2 \tilde{U} e^{-ikx}}{1 - r_1 r_2 e^{-2ikl}}}$$

$$P_a = \left|\tilde{U}^t\right|^2 / Z_0 = \frac{\left|\tilde{U}\right|^2}{Z_0} \frac{T^2}{\left(1 - Re^{-i\Phi}\right)\left(1 - Re^{i\Phi}\right)} = P_i \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\Phi/2)}$$

Hierbei ist $R = |r_1||r_2|$; $T = |t_1||t_2|$; $\Phi = \phi_2 + \phi_1 - 2kl$ und P_i ist die links von S_1 einfallende Leistung.

$$P_a = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 P_i \frac{1}{1 + F\sin^2(\Phi/2)}$$ Airyfunktion

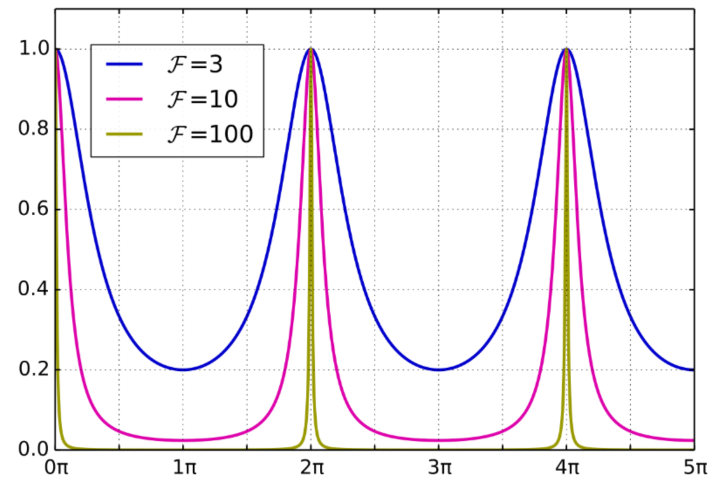
mit dem Faktor der Finesse $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ Für $R = 0.90$ $F \approx \frac{4}{0.01} = 400$

Die transmittierte Leistung P ist maximal für $\Phi = 2\pi n$.

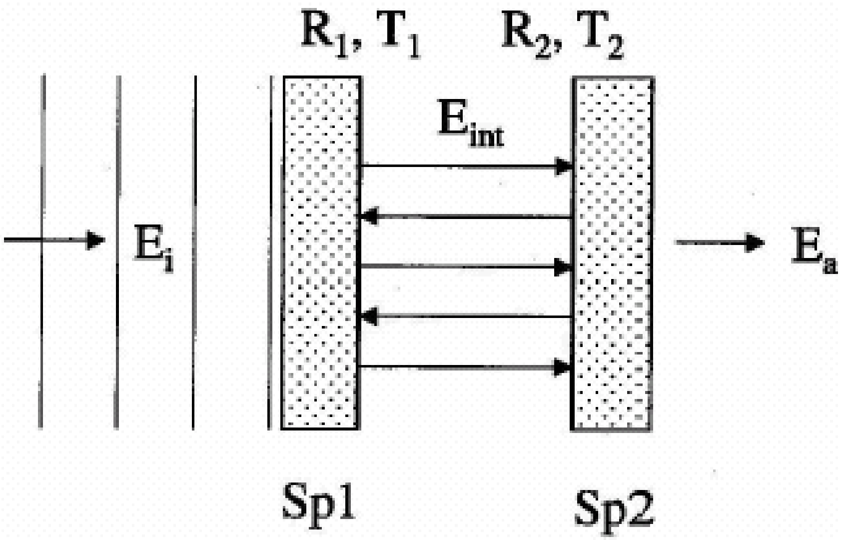
In den häufig realisierten Fall $\phi_1 = \phi_2 = \pi$ (oder $\phi_1 = \phi_2 = 0$) ist die Resonanzbedingung:

$2kl = 2\pi n$ ➡ $l = \frac{\pi}{k} n$ ➡ $l = \frac{\lambda}{2} n$ $P_a = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 P_i = P_i$ wenn 1-R=T – keine Verluste

$$P_a = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 P_i \frac{1}{1+F\sin^2(\Phi/2)}$$



Alle Formeln gelten auch, wenn die Teilwellen optische Wellen sind, die sich frei ausbreiten, und sich an den Stellen x = 0 und x = l (teildurchlässige) Spiegel befinden, die auf der Ausbreitungsrichtung senkrecht stehen.



Man spricht dann von Vielstrahlinterferenz und bezeichnet die Anordnung als Fabry–Perot–Resonator. Ein FP–Resonator stellt ein hochauflösendes Interferometer dar.

Kontrast: C=Pmax/Pmin=F+1<1000