Institut für Mathematische Statistik

Löwe/Schubert
SS 2014

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 10

Aufgabe 37 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für die allgemeine Normalverteilung $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx$ die Fouriertransformierte gegeben ist durch $\hat{\mu}(x) = e^{iax - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2}$.

Aufgabe 38 (4 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe von Fouriertransformierten den Poisson'schen Grenzwertsatz.

Aufgabe 39 (4 Punkte)
Es sei X eine Zufallsvariable. Zeigen Sie:

a) $aX + b$ hat die Fouriertransformierte $e^{ibt}\varphi_X(at)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

b) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

c) X ist symmetrisch um 0 verteilt $\Leftrightarrow$ $\hat{\mathbb{P}}_X$ ist reellwertig.

d) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Gleichverteilung auf $(-a, a)$ für $a > 0$.

Aufgabe 40 (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte einer Zufallsgröße mit der λ-Dichte
$$g(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

b) Berechnen Sie für $a \in \mathbb{R}, b > 0$ die Fouriertransformierte der $\mathcal{C}(a, b)$-Verteilung (Cauchy-Verteilung) mit der λ-Dichte
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{b^2 + (x-a)^2}.$$

c) Zeigen Sie: Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2 > 0$ gilt
$$\mathcal{C}(a_1, b_1) * \mathcal{C}(a_2, b_2) = \mathcal{C}(a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Abgabetermin: Donnerstag, 3.7.2014 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 133–136.