Jun.-Prof. Dr. C. Mukherjee
Yannic Bröker

Winter Semester 2018/19
16.10.2018

Finanzmathematik

Blatt 1

Abgabe: 23.10.2018 bis 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, 2, 3$. Wir betrachten das 1-Perioden Finanzmarktmodell, gegeben durch die Preise $\bar{X}_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}^T$ und $\bar{X}_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}^T$, $\bar{X}_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^T$, $\bar{X}_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \end{pmatrix}^T$. Zeigen Sie, dass es in diesem Finanzmarktmodell eine Arbitragemöglichkeit gibt und geben Sie diese an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte Z bezüglich $\mathbb{P}$.

(a) Zeigen Sie, dass Z $\mathbb{Q}$-f.s. eindeutig und positiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass genau dann $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ äquivalent sind, wenn Z $\mathbb{P}$-f.s. positiv ist. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} = Z^{-1}.$$

(c) Sei $\mathbb{Q}'$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mathbb{Q}' \ll \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass eine Kettenregel im folgenden Sinne gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}'}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}'}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}.$$

(d) Seien $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und $Z = (Z_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein Dichteprozess von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\mathbb{P}$ (d.h. es ist $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\big|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$), mit $Z > 0$ $\mathbb{P}$-f.s. Zeigen Sie, dass ein $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ genau dann ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist, wenn das Produkt $(X_t Z_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein $\mathbb{P}$-Martingal ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen Sie Teil (i) des Lemmas 1.12 aus der Vorlesung, d.h. dass eine Handelsstrategie $\bar{H} = (H^0, H)$ genau dann selbstfinanzierend ist, wenn für alle $t = 0, ..., T$,

$$V_t(\bar{H}) = V_0(\bar{H}) + \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot (X_s - X_{s-1}).$$