Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SoSe 2019

Seminar zur algebraischen Geometrie: Deformationstheorie und Liften von Kurven

In diesem Seminar werden wir uns mit der Frage beschäftigt, wie man ein gegebenes algebraisches oder geometrisches Objekt in eine "stetige Familie" ausdehnen kann. Diese Deformationstheorie ist heutzutage ein wichtiger Bestandteil der algebraischen und arithmetischen Geometrie.

Zu Beginn des Seminars werden wir uns ganz allgemein mit Deformationsfunktoren auf Artinringen beschäftigen. Diese bilden das lokale Analogon zu den (globalen) Funktoren in der algebraischen Geometrie. Das erste Ziel wird es sein, den Satz von Schlessinger zu beweisen. Dieser liefert uns Kriterien, wann ein Deformationsfunktor pro-darstellbar ist. In der Praxis sind die Schlessinger-Kriterien erfüllt, falls der Deformationsfunktor eine sogenannte Tangential-Obstruktionstheorie besitzt. Letztere Theorie macht auch Aussagen über die Struktur der Menge von Lifts eines vorgegebenen Objekts.

Im zweiten Teil des Seminars werden wir uns mit der Anwendung beschäftigen, warum sich glatte Kurven in Charakteristik $p > 0$ zu glatten Kurven in Charakteristik 0 liften lassen. Dafür benötigen wir zum einen Garbenkohomologie, welche parallel in der Vorlesung "Algebraische Geometrie 2" behandelt wird, zum anderen die Theorie der formalen Schemata und deren Algebraisierung.

1) **Deformationsfunktoren I**
Deformationsfunktoren, Zariski-Kotangentialraum, [5, Abschnitt 1]. Pro-darstellbare Funktoren [1, Def. 6.2.1]. Von "globalen" zu "lokalen" Funktoren [1, Ex. 6.1.6] bzw. [2, Prop. 1.1.2].

2) **Deformationsfunktoren II**
Weitere Beispiele: Picard-Funktor [5, (3.1)] mit Resultat [5, Prop. 3.2], Liften von Schemata zu flachen Schemata sowie Liften von kohärenten Garben [1, Ex. 6.3.7] (ohne Beweis). Glatte Abbildungen von Deformationsfunktoren, Tangentialraum, pro-darstellbare Hülle [5, Abschnitt 2].

3) **Schlessinger-Kriterien**
Die Vektorraumstruktur auf dem Tangentialraum [5, Lemma 2.10]. Schlessinger-Kriterien [5, Theorem 2.11].

4) **Tangential-Obstruktions-Theorie I**
Definition Tangential-Obstruktions-Theorie (T-O-Theorie) [1, Def. 6.1.21].
Pro-darstellbare Funktoren besitzen eine T-O-Theorie [1, Thm. 6.1.19]. T_1 ist eindeutig bestimmt [1, Prop. 6.1.23], T_2 aber nicht, siehe auch [1, Thm. 6.2.4] (ohne Beweis). Beispiele [1, Ex. 6.3.7 (1),(2)].

5) **Tangential-Obstruktions-Theorie II**
Weiteres Beispiel: Deformation von abgeschlossenen Unterschemata, siehe Anfang von [1, 6.4] (ohne Beweis). Zusammenhang einer T-O-Theorie eines pro-darstellbaren Funktors und dessen Geometrie [1, Cor. 6.2.5] und [1, Cor. 6.2.6]. Zusammenhang einer T-O-Theorie mit den Schlessinger-Kriterien [7, Prop. 2.21].

6) **Formale Schemata I**
Kurze Wiederholung zu inversen Limiten (u.a. [6, II,9.3.A]), sowie Artin-Rees-Lemma [6, Anfang von II, 9]. Definition (affiner noetherscher) formaler Schemata [6, II,9.3].

Formale Vervollständigung und algebraisierbare formale Schemata [6, II, Ex. 9.3.2]. Siehe auch [1, Kapitel 8].

7) **Formale Schemata II**
   Definierende Ideale und als Bemerkung [6, II, Prop. 9.5]. Von A-Moduln zu kohärenten Garben auf $\mathfrak{X}$ [6, II, Prop. 9.4,9.6-9.9].
8) **Formales GAGA**
   Formales GAGA [1, Thm. 8.4.2]. Endliche Morphismen [1, 8.4.4(b)]. Korollar [1, 8.4.5-8.4.7]. Bemerkung [1, 8.4.8].
9) **Algebraisierung und Deformation von Vektorbündel**
   Projektive formale Schemata sind algebraisierbar [1, Thm. 8.4.10]. Deformationen von Vektorbündeln [1, Thm. 8.5.3]. Korollar [1, 8.5.5-8.5.6].
10) **Liften von Kurven**
   Glatte Morphismen (formaler) Schemata [1, 8.5.7]. Deformationen von glatten Schemata [1, Thm. 8.5.9]. Bemerkung [1, 8.5.10]. Liften von Kurven [1, Thm. 8.5.19].

Literatur

[1] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, *Fundamental algebraic geometry. Grothendieck's FGA explained*, Mathematical Surveys and Monographs 123, Amer. Math. Soc. 2005.
[2] B. Osserman, *Deformation Theory and Moduli in Algebraic Geometry*, https://www.math.ucdavis.edu/~osserman/math/workshop.pdf.
[3] M. Olsson, *Tangent space and obstruction theories*, https://math.berkeley.edu/~molsson/MSRISummer07.pdf.
[4] N. Nitsure, *Notes on deformation theory*, https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00392119/document.
[5] M. Schlessinger, *Functor of Artin rings*, Transactions of the AMS 130 (1968), 208–222.
[6] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer.
[7] http://math.columbia.edu/~hliu/classes/f17-algebraic-geometry.pdf