

Abbildung 4.5.2: Ebene Leiterschleife im homogenen Magnetfeld.

Definition 4.5.2 (Kräftepaar). Zwei Kräfte $\vec{F}_1(\vec{r}_1)$ und $\vec{F}_2(\vec{r}_2)$ gleichen Betrags und entgegengesetzter Richtung, die in zwei unterschiedlichen Punkten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 angreifen,

$$\vec{F}_1(\vec{r}_1) = -\vec{F}_2(\vec{r}_2), \quad \text{mit } \vec{r}_1 \neq \vec{r}_2. \quad (4.5.2)$$

Wie in Abb. 4.5.1b dargestellt, erhält man das Drehmoment eines Kräftepaars durch vektorielle Addition:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ &\stackrel{(4.5.2)}{=} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{r}_{12} \times \vec{F}_2. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Im Gegensatz zum Drehmoment einer einzelnen Kraft hängt es nicht von der Wahl des Pols ab, sondern ist eine charakteristische Eigenschaft des Kräftepaars.

In der Festkörpermechanik befindet sich ein Körper im Gleichgewicht, wenn

$$\text{die Summe aller Kräfte verschwindet:} \quad \sum \vec{F} = 0; \quad (4.5.4a)$$

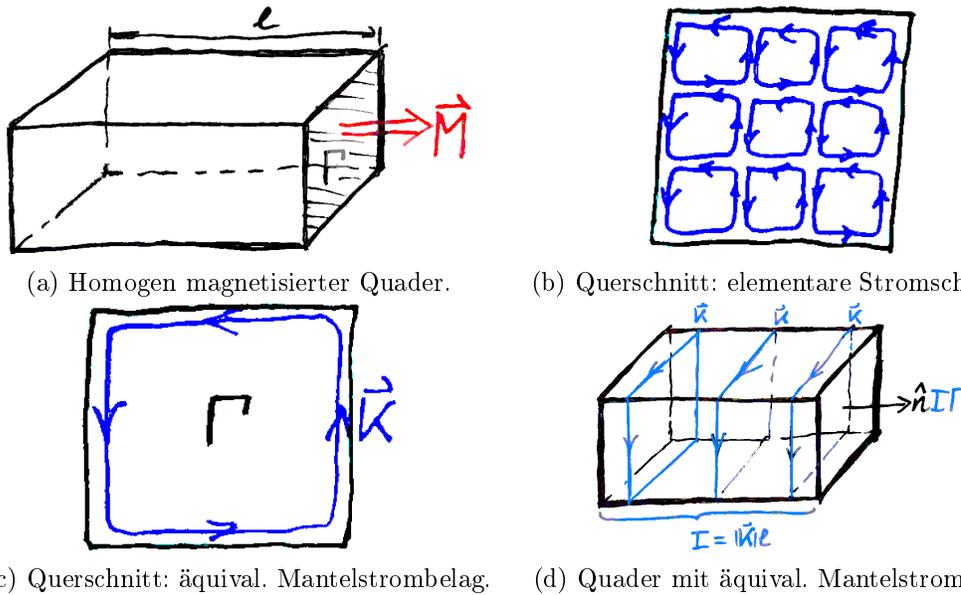
$$\text{die Summe aller Momente verschwindet:} \quad \sum \vec{T} = 0. \quad (4.5.4b)$$

4.5.2 Magnetisches Dipolmoment und Magnetisierung

Abb. 4.5.2 zeigt eine Leiterschleife längs der Berandung einer ebenen Fläche Γ mit Flächennormalvektor \vec{n} . Sie wird von einem stationären Strom I durchflossen und befindet sich in einem homogenen Magnetfeld \vec{B} . Man kann zeigen, dass für das Drehmoment \vec{T} auf die Schleife

$$\vec{T} = I|\Gamma|\hat{n} \times \vec{B} \quad (4.5.5)$$

gilt. Das Drehmoment hängt vom Flächenninhalt ab, nicht aber von der Flächenform.



(a) Homogen magnetisierter Quader. (b) Querschnitt: elementare Stromschleifen.
 (c) Querschnitt: äquival. Mantelstrombelag. (d) Quader mit äquival. Mantelstrombelag.
 Abbildung 4.5.3: Quaderförmiger Stabmagnet mit homogener Magnetisierung.

Definition 4.5.3 (Magnetisches Dipolmoment \vec{m}).

$$\vec{m} = I|\Gamma|\hat{n} = I\vec{\Gamma}. \tag{4.5.6}$$

Damit gilt für das Drehmoment

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}. \tag{4.5.7}$$

Definition 4.5.4 (Magnetisierung \vec{M}). Die räumliche Dichte des magnetischen Dipoloments:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} = \frac{d\vec{m}}{dV}. \tag{4.5.8}$$

Ihre wichtigste Anwendung besteht in der Beschreibung von Elementarströmen im Sinne des Kontinuummodells.

4.5.3 Magnetische Eigenschaften von Materie

Die Drehimpulse der Elektronenorbitale und -spins sowie der Spins der Kernteilchen weisen darauf hin, dass es auch auf atomarer Ebene bewegte Ladungen gibt und damit *Elementarströme* fließen. Wie äußere Ströme haben auch diese Magnetfelder zur Folge. Die Tatsache, dass auch das elektrisch neutrale Neutron ein nicht-verschwindendes magnetisches Moment aufweist, deutet darauf hin, dass es aus elektrisch geladenen Bausteinen, den Quarks, besteht.

Beispiel 4.5.1 (Stabmagnet). Abb. 4.5.3 zeigt einen quaderförmigen Stabmagneten mit homogener Magnetisierung. Wie in Abb. 4.5.3b dargestellt wird diese durch eine Vielzahl von über den Querschnitt verteilten elementaren Stromschleifen hervorgerufen. Weil sich im homogenen Fall die Ströme im Inneren kompensieren, sind die elementaren Schleifen äquivalent zu einer makroskopischen Stromschleife längs der Kontur; siehe Abb. 4.5.3c. Somit entspricht die Gesamtheit der elementaren Stromschleifen dem in Abb. 4.5.3d skizzierten Strombelag auf der Mantelfläche des Magneten.

4.5.4 Magnetische Erregung und Durchflutungssatz

Nach der Ampèreschen Hypothese liegen die Ursachen des magnetischen Feldes auch in Anwesenheit von Materie ausschließlich in elektrischen Strömen. Kennzeichnet man äußere Ströme mit dem Index $(\cdot)_a$ und Elementarströme mit $(\cdot)_{el}$, so erhält der Durchflutungssatz (4.4.2) für eine gegebene Fläche Γ die Form

$$\oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \sum_{\Gamma} (I_a + I_{el}). \quad (4.5.9)$$

Weil die Elementarströme nicht zugänglich sind, erweist es sich als zweckmäßig, das Magnetfeld gemäß der Art der Anregung in zwei Anteile aufzuspalten:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{H} + \vec{M}, \quad (4.5.10)$$

wobei die magnetische Erregung \vec{H} durch äußere Ströme hervorgerufen wird, und die Magnetisierung \vec{M} von Elementarströmen herrührt. Damit zerfällt (4.5.9) in

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{s} = \sum_{\Gamma} I_{el} \quad (4.5.11)$$

und die allgemeine Form des Durchflutungssatzes

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_{\Gamma} I_a. \quad (4.5.12)$$

Definition 4.5.5 (Magnetische Spannung U_M). Das Linienintegral der magnetischen Erregung \vec{H} längs eines Weges \mathcal{L} :

$$U_M(\mathcal{L}) := \int_{\mathcal{L}} \vec{H} \cdot d\vec{s}. \quad (4.5.13)$$

Mit der magnetischen Umlaufspannung $\dot{U}_M(\partial\Gamma)$ erhält der Durchflutungssatz die Form

$$\dot{U}_M(\partial\Gamma) = \sum_{\Gamma} I_a = \Theta(\Gamma). \quad (4.5.14)$$

4.5.5 Magnetische Suszeptibilität und Permeabilität

Das Anlegen eines äußeren Stroms kann elementare Schleifenströme hervorrufen (Induktion, siehe später) oder in eine Vorzugsrichtung eindrehen. Daher ist die Magnetisierung häufig eine Funktion der Erregung.

Definition 4.5.6 (Magnetische Suszeptibilität χ). Proportionalitätsfaktor von der Erregung zur Magnetisierung:

$$\chi : \quad \vec{M} = \chi \vec{H}. \quad (4.5.15)$$

Hieraus folgt für die Flussdichte die Darstellung

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}. \quad (4.5.16)$$

Zur weiteren Vereinfachung vereinbart man:

Definition 4.5.7 (Relative magnetische Permeabilität μ_r).

$$\mu_r = 1 + \chi. \quad (4.5.17)$$

Definition 4.5.8 (Magnetische Permeabilität μ).

$$\mu = \mu_0 \mu_r. \quad (4.5.18)$$

Somit gilt das einfache Materialgesetz

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}. \quad (4.5.19)$$

Im Fall einer nichtlinearen Magnetisierungskennlinie ist auch die Steigung der $B(H)$ -Kennlinie an einer gegebenen Stelle $H = H_0$ von Interesse. Sie wird durch die differentielle Permeabilität μ_D beschrieben:

$$\mu_D := \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H} \Bigg|_{H_0} = \frac{dB}{dH} \Bigg|_{H_0}. \quad (4.5.20)$$

Der Einfachheit wegen ist hier eine skalare Darstellung benutzt worden.

Definition 4.5.9 (Magnetische Reluktivität ν). Sie bildet die Flussdichte \vec{B} auf die Erregung \vec{H} ab:

$$\nu : \quad \vec{H} =: \nu \vec{B} \quad \text{mit } \nu = \mu^{-1}. \quad (4.5.21)$$

4.5.6 Einteilung magnetischer Werkstoffe

Supraleiter ($\mu_r = 0$):

Im Innern von Supraleitern (1. Art) verschwindet die magnetische Flussdichte. Der magnetische Fluss beschränkt sich auf eine dünne Schicht an der Oberfläche. Siehe auch Kapitel 3.3.8.

Tabelle 4.5.1: Beispiele diamagnetischer Stoffe

Stoff	magnet. Suszeptibilität χ
Graphit	$-4.5 \cdot 10^{-4} / -8.5 \cdot 10^{-5}$
Bismut	$-7.1 \cdot 10^{-4}$
Germanium	$-1.6 \cdot 10^{-5}$
Wasser	$-9.0 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$-6.4 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 4.5.2: Beispiele paramagnetischer Stoffe

Stoff	magnet. Suszeptibilität χ
$\text{MnSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$	$+2.64 \cdot 10^{-3}$
Uran	$+400 \cdot 10^{-6}$
Platin	$+260 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$+22 \cdot 10^{-6}$
Sauerstoff O_2	$+1.9 \cdot 10^{-6}$

Diamagnetische Stoffe ($\mu_r < 1$):

Beim Einbringen in ein Magnetfeld werden Elementarströme induziert, die nach der Lenzschen Regel so gerichtet sind, dass sie das Feld schwächen. Mehr zur Induktion findet sich in Kapitel 5.

Dieser Effekt ist in allen Materialien vorhanden. Wegen seiner geringen Wirkung ist er jedoch nur in Stoffen beobachtbar, die ohne äußere Anregung kein resultierendes magnetisches Moment besitzen. Diamagnetismus ist bei Bismut (auch: Wismut) und Graphit am stärksten ausgeprägt. Im inhomogenen Magnetfeld werden diamagnetische Körper aus dem Feld gedrängt. Beispiele diamagnetischer Stoffe gibt Tabelle 4.5.1.

Paramagnetische Stoffe ($\mu_r > 1$):

Dies sind Stoffe, die von sich aus ein resultierendes magnetisches Moment besitzen. In Anwesenheit einer äußeren Anregung wirken Drehmomente auf die elementaren Stromschleifen, sodass sich deren Flächennormalen in die Feldrichtung eindreuen. Dies führt zu einer Verstärkung des Feldes. Nach Abschalten der Anregung gibt es durch die Wärmebewegung keine Vorzugsrichtung der elementaren Stromschleifen. Im inhomogenen Magnetfeld werden diamagnetische Körper in das Feld gezogen. Beispiele paramagnetischer Stoffe gibt Tabelle 4.5.2.

Ferromagnetische Stoffe ($\mu_r \gg 1$):

Auch in Abwesenheit einer äußeren Anregung existieren Domänen gleich ausgerichteter Magnetisierung, sogenannte Weißsche Bezirke. Man spricht von spon-

Tabelle 4.5.3: Beispiele ferromagnetischer Stoffe

Stoff	Curie-Temperatur T_C	magnet. Suszeptibilität χ
Eisen	1033 K	bis 5000
Nickel	627 K	bis 1000
Cobalt	1395 K	
Gadolinium	292.5 K	

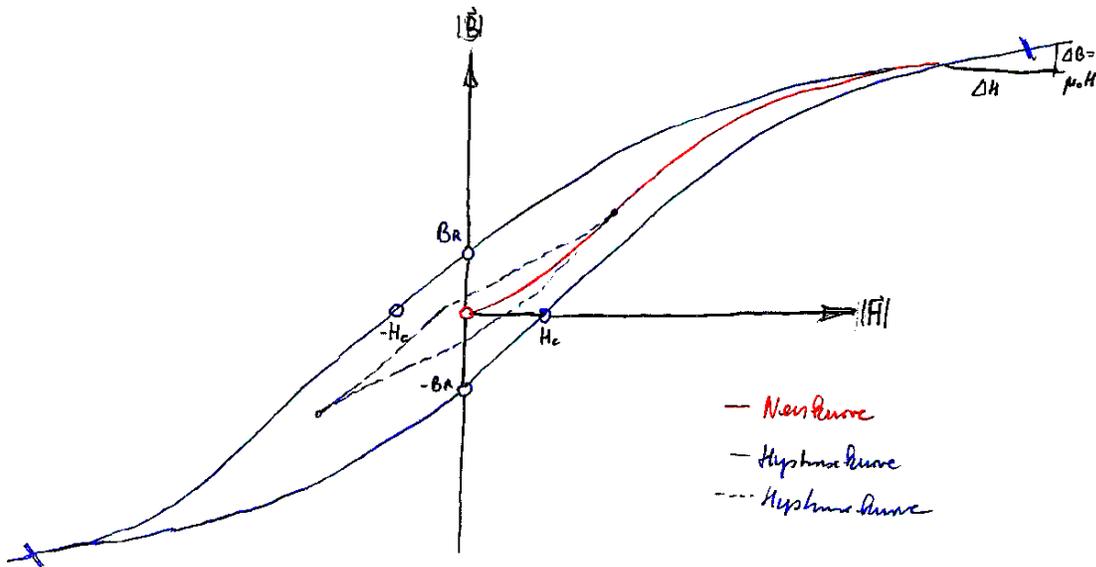


Abbildung 4.5.4: Magnetisierungskennlinie eines ferromagnetischen Stoffes.

taner Magnetisierung. Ihre Ursache liegt in Wechselwirkungen zwischen Spinmomenten; diese sind nur im Rahmen der Quantenphysik erklärbar. Magnetische Domänen haben Linearabmessungen im Bereich von nm bis μm und sind somit kleiner als die Kristallite in einem Gefüge.

Ferromagnetismus ist nur unterhalb einer kritischen Temperatur möglich, der Curie-Temperatur T_C . Darüber werden die Stoffe paramagnetisch. Beispiele ferromagnetischer Stoffe gibt Tabelle 4.5.3

Eine typische Magnetisierungskennlinie ($B(H)$ -Kurve) zeigt Abb. 4.5.4: Im Urzustand sind die Weißschen Bezirke regellos ausgerichtet: Makroskopisch tritt keine Flussdichte auf, $|\vec{B}| = 0$. Legt man eine äußere Anregung an, so wachsen jene Domänen, deren Magnetisierungsrichtung nahe der Feldrichtung liegt. Vergrößert man den Strom bzw. H , so verschieben und drehen sich die Domänenwände. Weil hierbei energetische Barrieren zu überwinden sind, erfolgen diese Bewegungen sprunghaft; diese sogenannten Barkhausensprünge sind beobachtbar. Bei weiterer Erhöhung der Anregung ist eine ausgeprägte Sättigung erkennbar: Sind alle magnetischen Momente in Feldrichtung eingedreht, so strebt die differentielle Permeabilität gegen μ_0 : $\mu_D : \mu_D \rightarrow \mu_0$.

Verringert man danach den äußeren Strom und damit H bis auf Null, so verbleibt auch ohne Bestromung ($|\vec{H}| = 0$) aufgrund energetischer Barrieren eine permanente Magnetisierung. Der zugehörige Betrag der Flussdichte heißt Remanenzflussdichte B_r .

Erhöht man danach den Strom in umgekehrter Richtung, so erreicht man einen Punkt, an dem die Flussdichte verschwindet. Der zugehörige Betrag der Erregung heißt Koerzitiveerregung H_c . Entsprechend wird auf der $B(H)$ -Kennlinie der Punkt $(-H_c, 0)$ erreicht.

Erhöht man die Erregung in negativer Richtung weiter ($H \rightarrow -\infty$), so geht der Stoff in die Sättigung. Lässt man danach die Erregung durch den Nullpunkt wieder gegen große positive Werte streben, so führt die Kennlinie zunächst durch den Remanenzpunkt $(0, -B_r)$ und danach durch den Koerzitivpunkt $(H_c, 0)$ in den Bereich der Sättigung bei $H \rightarrow \infty$. Die durch die Kennlinie beschriebene Kurve heißt Hysteresekurve. Wird der Stoff nicht bis in die Sättigung getrieben, so entstehen kleinere Hysteresekurven; siehe Abb. 4.5.4. Die wesentliche Tatsache ist, dass das magnetische Verhalten – abgesehen vom Sättigungsbereich – von der Vorgeschichte abhängt. Der Teil der Magnetisierungskennlinie beim erstmaligen Aufmagnetisieren vom unmagnetisierten Zustand bis in die Sättigung heißt Neukurve.

Man kann zeigen, dass die von der Hysteresekurve eingeschlossene Fläche der Energie entspricht, die beim einmaligen Umlaufen der Hysteresekurve in Wärme umgesetzt wird. Man spricht von Ummagnetisierungsverlusten.

Nach der Form der Hysteresekurve unterscheidet man hart- und weichmagnetische Stoffe:

- Hartmagnetische Materialien besitzen eine weite Hysteresekurve mit einer großen Koerzitiveerregung H_c und einer großen Remanenzflussdichte B_r . Sie finden als Werkstoffe für Permanentmagnete Anwendung.
- Weichmagnetische Materialien besitzen eine schmale Hysteresekurve mit einer kleinen Koerzitiveerregung H_c und einer kleinen Remanenzflussdichte B_r . Diese Werkstoffe sind für Wechselfelder geeignet. Die für solche Anwendungen ebenfalls wichtige Sättigungssflussdichte B_{sat} liegt bei Eisen um 1.4 T.

4.5.7 Grenzflächenbedingungen

Wir betrachten eine glatte Grenzfläche zweier Medien mit den magnetischen Permeabilitäten μ_1 und μ_2 . Der normierte, vom Medium 1 in das Medium 2 weisende Flächennormalvektor wird mit \hat{n}_{12} bezeichnet. Weiterhin fordern wir, dass an der Grenzfläche frei von Flächenströmen sein möge.

Grenzflächenbedingung für die magnetische Flussdichte

Die Grenzflächenbedingung erhält man am einfachsten per Analogie mit der elektrischen Flussdichte an einer Grenzschicht, die frei von Flächenladungen ist. Die

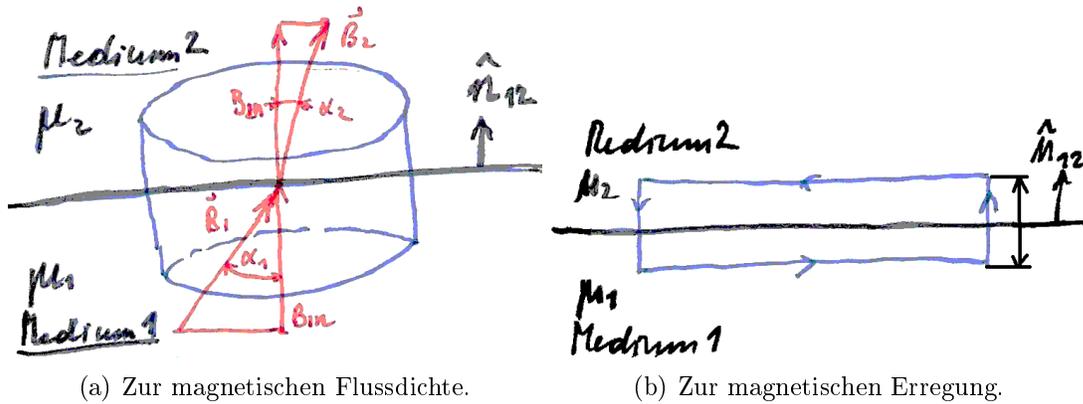


Abbildung 4.5.5: Grenzflächenbedingungen für das Magnetfeld.

elektrische Flussbilanz im ladungsfreien Fall (2.11.19) hat ergeben, dass die Normalkomponenten der elektrischen Flussdichte D_{1n} und D_{2n} stetig sind (2.11.23):

$$\dot{\psi}(\partial\Omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{2n} = D_{1n}. \quad (4.5.22)$$

Weil der magnetische Hüllfluss stets verschwindet (4.3.15), müssen per Analogie die Normalkomponenten der magnetischen Flussdichte B_{1n} und B_{2n} stetig sein:

$$\dot{\Phi}(\partial\Omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{\Gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{2n} = B_{1n}. \quad (4.5.23)$$

Wie in Abb. 4.5.5a angedeutet, könnte man einen eigenständigen Beweis ähnlich zu Kapitel 2.11.4 über den Hüllfluss durch die Berandung eines die Grenzfläche durchdringenden Zylinders führen.

Grenzflächenbedingung für die magnetische Erregung

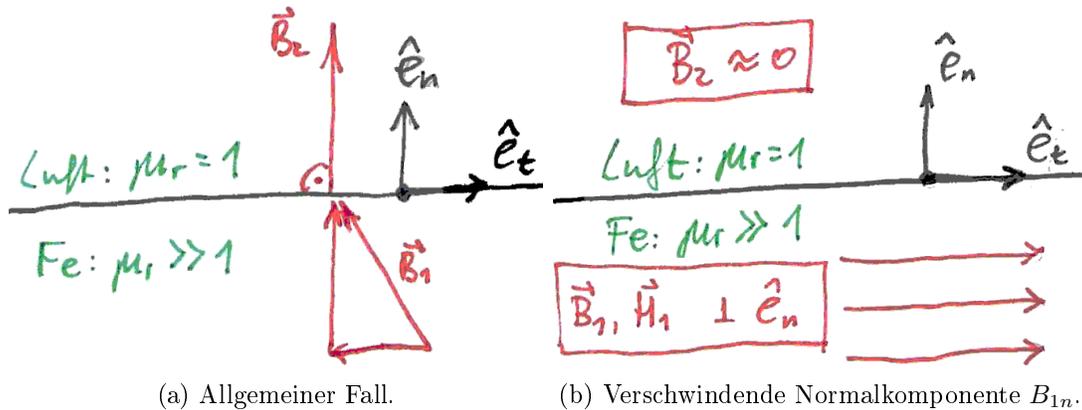
Die Grenzflächenbedingung erhält man am einfachsten per Analogie mit der elektrischen Feldstärke in der Elektrostatik. Aus der Tatsache, dass die elektrische Umlaufspannung verschwindet (2.11.10), hat sich ergeben, dass die Tangentialkomponenten der elektrischen Flussdichte E_{1t} und E_{2t} stetig sind (2.11.16):

$$\dot{U}(\partial\Gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\partial\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{2t} = E_{1t}. \quad (4.5.24)$$

Abb. 4.5.5b zeigt einen geschlossenen Pfad $\partial\Gamma$ der sich beidseitig an die Grenzfläche anschmiegt. Unter der Voraussetzung verschwindender Flächenströme liefert der Durchflutungssatz (4.5.14), dass die magnetische Umlaufspannung verschwindet. Per Analogie müssen die Tangentialkomponenten der magnetischen Erregung H_{1t} und H_{2t} stetig sein:

$$\dot{U}_M(\partial\Gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\partial\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{2t} = H_{1t}. \quad (4.5.25)$$

Einen eigenständigen Beweis könnte man wie in Kapitel 2.11.4 führen.

Abbildung 4.5.6: Grenzfläche eines Mediums mit $\mu_{r1} \gg 1$ zu Luft mit $\mu_{r2} = 1$.

Beispiel 4.5.2 (Grenzfläche Eisen – Luft). Abb. 4.5.6a zeigt die Grenzfläche eines hochpermeablen Mediums 1 mit $\mu_{r1} \gg 1$, z.B. Eisen, zu einem Medium 2 mit $\mu_r = 1$, z.B. Luft. Gesucht sind die Normal- und Tangentialkomponenten der Flussdichte an der Grenzschicht in Medium 2.

Mit Hilfe des Flächennormalvektors \hat{e}_n und des Tangentialvektors \hat{e}_t zerlegt man die Felder an der Grenzfläche in ihre jeweiligen Normal- und Tangentialkomponenten:

$$\vec{B}_1 = B_{1t}\hat{e}_t + B_{1n}\hat{e}_n, \quad (4.5.26)$$

$$\vec{B}_2 = B_{2t}\hat{e}_t + B_{2n}\hat{e}_n. \quad (4.5.27)$$

Die Stetigkeitsbedingung (4.5.23) liefert unmittelbar

$$B_{2n} = B_{1n}. \quad (4.5.28)$$

Die Stetigkeitsbedingung (4.5.25) und das Materialgesetz (4.5.19) führen auf

$$H_{2t} = H_{1t}, \quad (4.5.29)$$

$$\frac{1}{\mu_2}B_{2t} = \frac{1}{\mu_1}B_{1t}, \quad (4.5.30)$$

$$B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1}B_{1t} \approx 0 \quad \text{für } \mu_{r2} \ll \mu_{r1}. \quad (4.5.31)$$

Die Flussdichte tritt aus dem hochpermeablen Material näherungsweise senkrecht aus.

Abb. 4.5.6b zeigt den Spezialfall, dass die Flussdichte im Eisen tangential zur Grenzfläche verläuft, $B_{1n} = 0$. Wegen (4.5.30) und (4.5.31) gilt in der Luft

$$B_{1n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B_{2n} = 0, \\ B_{2t} \approx 0. \end{cases} \quad (4.5.32)$$

Die Flussdichte in der Luft ist vernachlässigbar; der magnetische Fluss wird vom hochpermeablen Material geführt.

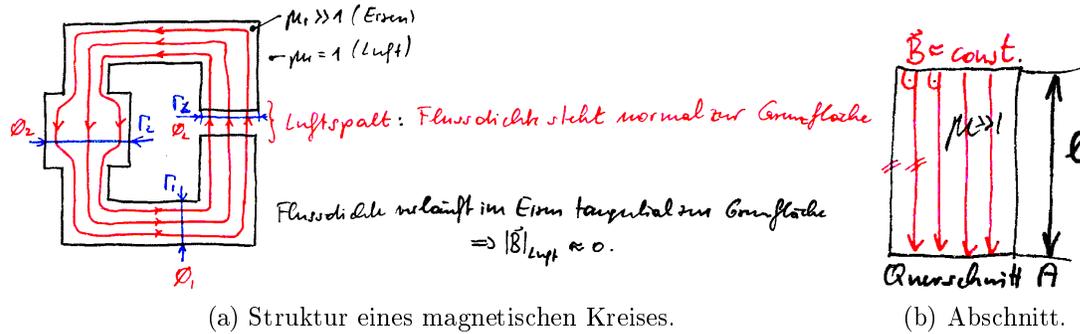


Abbildung 4.6.1: Magnetkreis mit mehreren hochpermeablen Abschnitten und wohldefiniertem Luftspalt.

4.6 Der magnetische Kreis

Bsp. 4.5.2 hat gezeigt, dass hochpermeable Stoffe den tangential zu einer Grenzfläche verlaufenden magnetischen Fluss führen. Dies ermöglicht die Konstruktion magnetischer Kreise mit wohldefinierten Luftspalten. Abb. 4.6.1a zeigt eine typische Anordnung: einen hochpermeablen Kern mit Luftspalt.

Der Magnetkern besteht aus mehreren zylindrischen Abschnitten (d.h. konstanten Querschnitts). Für die einzelnen Abschnitte rechnet man mit mittleren Längen; Inhomogenitäten der Flussdichte an den Grenzflächen einzelner Abschnitte werden üblicherweise vernachlässigt.

4.6.1 Ohmsches Gesetz des Magnetismus: Reluktanz

Definition 4.6.1 (Magnetischer Widerstand, Reluktanz R_M). Für einen unverzweigten Magnetpfad mit konstantem Fluss der Proportionalitätsfaktor zwischen dem magnetischen Fluss Φ und der magnetischen Spannung U_m :

$$R_M : \quad U_M = R_M \Phi. \quad (4.6.1)$$

Im Vergleich mit dem klassischen Ohmschen Gesetz für stationäre Ströme entspricht die magnetische Spannung U_M der elektrischen Spannung U , und der magnetische Fluss Φ entspricht dem elektrischen Strom I .

Beispiel 4.6.1 (Reluktanz eines hochpermeablen Zylinders). Abb. 4.6.1b zeigt einen in z -Richtung weisenden zylindrischen Abschnitt der Länge l und der Querschnittsfläche A . Seine Permeabilität ist homogene und sehr hoch, $\mu \gg \mu_0$, und seine Mantelflächen sind von Luft mit $\mu = \mu_0$ umgeben.

Die Flussdichte tritt senkrecht auf die Deckfläche ein bzw. auf die Grundfläche aus. Daher ist die Flussdichte axial ausgerichtet und homogen, und der magnetische Fluss Φ ist für jeden Querschnitt derselbe:

$$\vec{B} = B \hat{e}_z = \text{const.} : \quad \Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{\Gamma} = \int_A B \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z d\Gamma = BA. \quad (4.6.2)$$

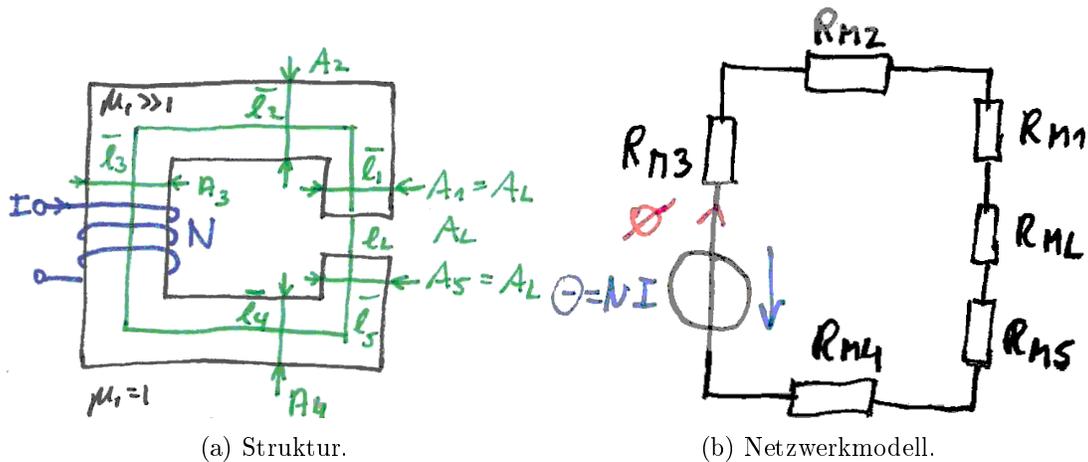


Abbildung 4.6.2: Unverzweigter Magnetkreis: Längs eines Umlaufs ist der magnetische Fluss auf allen Querschnitten konstant.

Für die magnetische Spannung U_M längs der Zylinderachse folgt somit

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} B \hat{e}_z = \text{const.} : \quad U_m = \int_{\mathcal{L}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_0^l \frac{1}{\mu} B \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z dz = \frac{1}{\mu} Bl, \quad (4.6.3)$$

$$U_m = \left(\frac{l}{\mu A} \right) \Phi. \quad (4.6.4)$$

Somit gilt für die Reluktanz

$$R_M = \frac{l}{\mu A}. \quad (4.6.5)$$

4.6.2 Der unverzweigte Magnetkreis: Maschenregel

Abb. 4.6.2 zeigt einen Magnetkreis, der aus einem hochpermeablen Kern und einem Luftspalt besteht. Der Kern setzt sich aus Abschnitten zusammen, die jeweils durch ihre mittlere Länge l_i , ihren Querschnitt A_i und ihre Permeabilität $\mu_i \gg \mu_0$ beschrieben werden. Der Luftspalt hat die Länge l_L und den Querschnitt A_L . Das Magnetfeld wird durch eine vom Gleichstrom I durchflossene Wicklung mit N Windungen erregt.

Die magnetische Flussdichte wird im hochpermeablen Material geführt und tritt normal zum Kernquerschnitt in den Luftspalt ein. Für die Anordnung ist kennzeichnend, dass der magnetische Fluss Φ längs eines geschlossenen Umlaufs durch beliebige Querschnitte derselbe ist:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_5 = \Phi_L = \text{const} = \Phi. \quad (4.6.6)$$

Man spricht von einem unverzweigten Magnetkreis mit dem Maschenfluss Φ .

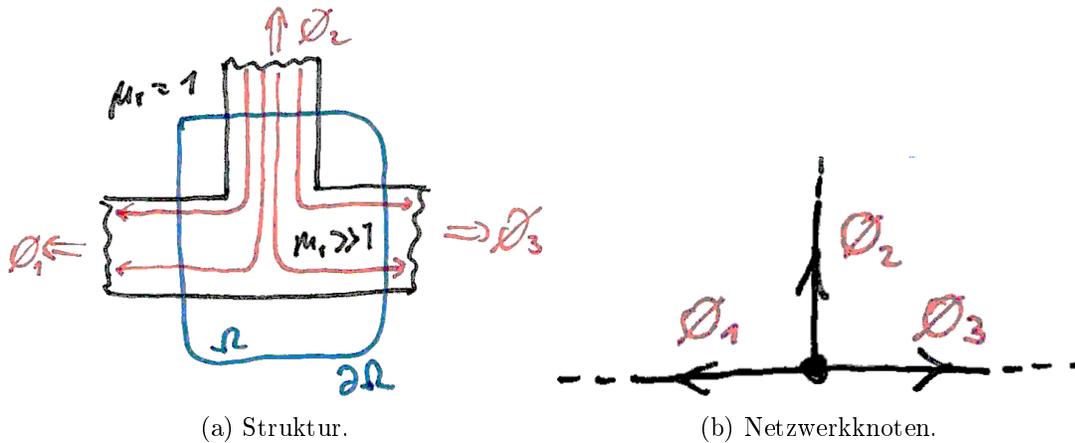


Abbildung 4.6.3: Verzweigung eines Magnetkerns. Der magnetische Fluss wird in den hochpermeablen Pfaden geführt.

Der Durchflutungssatz (4.5.14)

$$\Theta = Ni = \dot{U}_M = \sum_i U_{M,i} \tag{4.6.7}$$

entspricht der Kirchhoffschen Maschenregel, wobei die Durchflutung Θ der elektrischen Quellspannung entspricht, und die magnetischen Spannungen die elektrischen ersetzen. Einsetzen der Reluktanz (4.6.1) unter Berücksichtigung der Konstanz des Maschenflusses führt auf

$$\Theta = \sum_i (R_{M,i} \Phi_i) = \left(\sum_i R_{M,i} \right) \Phi_i \quad \text{mit } R_{M,i} = \frac{l_i}{\mu_i A_i}. \tag{4.6.8}$$

Diese Gesetzmäßigkeit ist von der Serienschaltung elektrischer Widerstände bereits bekannt.

4.6.3 Verzweigungen: Knotenregel

Abb. 4.6.3a zeigt eine Verzweigung eines in Luft eingebetteten Magnetkerns aus hochpermeablen Material. Der magnetische Fluss wird im Magnetmaterial geführt, während die Flussdichte in der Luft näherungsweise verschwindet.

Allgemein betrachten wir die magnetisch leitfähige Verbindung von N Magnetpfaden mit den Flüssen Φ_1, \dots, Φ_N . Die Zählfeilrichtungen für die Flüsse mögen der Einfachheit wegen von der Verbindung weg gewählt sein. Schließt man die Verbindung in ein Gebiet Ω ein, so schneidet die Berandung $\partial\Omega$ die Magnetpfade $\partial\Omega$ mit den nach außen fließenden Flüssen Φ_i . Der in der Luft liegende Teil der Berandung befindet sich im feldfreien Raum.

Die magnetische Flussbilanz (4.3.15) liefert die Beziehung

$$\oplus(\partial\Omega) = 0 = \sum_i \Phi_i. \quad (4.6.9)$$

Sie entspricht der Kirchhoffschen Knotenregel für elektrische Netzwerke. Abb. 4.6.3b zeigt das entsprechende magnetische Netzwerk: Die Verzweigung wird als Netzknoten dargestellt.

Kapitel 5

Transiente Magnetfelder

Literaturverzeichnis

- [1] PHYSIKALISCH-TECHNISCHE BUNDESANSTALT: Die gesetzlichen Einheiten in Deutschland. Version: Mai 2016. https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/publikationen/broschueren/Einheiten_deutsch.pdf. Braunschweig und Berlin, D, Mai 2016. – techreport. – Abgerufen: 18.10.2018
- [2] PHYSIKALISCH-TECHNISCHE BUNDESANSTALT: Das neue Internationale Einheitensystem (SI). Version: Nov. 2017. https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/presse_aktuelles/broschueren/intern_einheitensystem/Das_neue_Internationale_Einheitensystem_V2.pdf. Braunschweig und Berlin, D, Nov. 2017. – techreport. – Abgerufen: 21.10.2019
- [3] GÖBEL, E. O. ; SIEGNER, U. : *The New International System of Units (SI) Quantum Metrology and Quantum Standards*. Wiley-VCH, 2019
- [4] PHILIPPOW, E. : *Grundlagen der Elektrotechnik*. 10. Berlin, D : Verlag Technik, 2000. – ISBN 978-3341012413
- [5] PREGLA, R. : *Grundlagen der Elektrotechnik*. 9. Berlin und Offenbach, D : VDE Verlag, 2016. – ISBN 9783800742059