

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	5
1 Einführung	1-1
1.1 Einordnung des Elektromagnetismus	1-1
1.2 Physikalische Größen	1-1
1.2.1 Messen	1-2
1.2.2 Das Internationale Einheitensystem	1-3
2 Das elektrostatische Feld	2-1
2.1 Grundlegende Beobachtungen	2-1
2.1.1 Leiter und Nichtleiter	2-2
2.2 Ladungserhaltung	2-2
2.3 Coulomb-Kraft	2-3
2.3.1 Anordnung mehrerer Punktladungen	2-4
2.4 Elektrische Feldstärke und Feldbegriff	2-5
2.4.1 Veranschaulichung des elektrischen Feldstärkefeldes	2-6
2.4.2 Leitfähige Körper	2-7
2.5 Kontinuierliche Ladungsverteilungen	2-9
2.6 Die elektrische Spannung	2-11
2.6.1 Das euklidische Skalarprodukt	2-11
2.6.2 Arbeit im elektrischen Feld	2-12
2.6.3 Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke	2-14
2.7 Das elektrische Skalarpotenzial	2-15
2.7.1 Äquipotenzialflächen	2-16
2.8 Ladung und elektrischer Fluss	2-17
2.8.1 Klassifizierung von Flächen	2-17
2.8.2 Fluss und Flussdichte	2-17
2.8.3 Elektrische Flussbilanz – Faradaysches Gesetz	2-19
2.8.4 Berechnung der elektrischen Flussdichte	2-19
2.9 Die elektrische Kapazität	2-21
2.9.1 Verschaltung von Kapazitäten	2-22
2.10 Elektrische Influenz	2-24
2.10.1 Leitfähiges Einfachplättchen	2-24

2.10.2	Leitfähiges Doppelpfättchen	2-27
2.10.3	Der Faradaysche Becherversuch	2-29
2.10.4	Anwendung: Bandgenerator nach van de Graaff	2-32
2.11	Elektrostatische Felder in Nichtleitern	2-32
2.11.1	Grundlegende Versuche	2-33
2.11.2	Dipolmoment und elektrische Polarisierung	2-33
2.11.3	Suszeptibilität und relative Permittivität	2-36
2.11.4	Grenzflächen zwischen zwei Medien	2-37
2.12	Energie des elektrostatischen Feldes	2-39
2.12.1	Energie eines Kondensators	2-39
2.12.2	Energiedichte und Feldenergie	2-40
2.12.3	Kraftberechnung durch virtuelle Verschiebung	2-41
2.13	Spiegelungsprinzip	2-43
2.13.1	Spiegelung an elektrisch leitfähiger Ebene ($\vec{E}_{\text{tan}} = 0$)	2-44
2.13.2	Spiegelung an flussfreier Fläche ($\vec{D}_n = 0$)	2-44
3	Das elektrische Strömungsfeld	3-1
3.1	Klassifizierung von Zeitfunktionen	3-1
3.2	Der elektrische Strom	3-3
3.2.1	Strom und Ladungstransport	3-3
3.2.2	Bezugssinn und Zählpfeile	3-4
3.2.3	Räumliche elektrische Stromdichte	3-4
3.2.4	Kontinuitätsgleichung der elektrischen Ladung	3-5
3.2.5	Wirkungen des elektrischen Stroms	3-5
3.3	Arten der Stromleitung	3-7
3.3.1	Orbitalmodell	3-7
3.3.2	Stromleitung im Vakuum	3-7
3.3.3	Stromleitung in Gasen	3-8
3.3.4	Stromleitung in Elektrolyten	3-10
3.3.5	Stromleitung in Festkörpern – Bändermodell	3-12
3.3.6	Nichtleiter und Halbleiter	3-12
3.3.7	Leiter	3-13
3.3.8	Supraleiter	3-14
3.4	Das stationäre elektrische Strömungsfeld	3-14
3.4.1	Die unverzweigte Leiterschleife	3-15
3.4.2	Die Kirchhoffsche Knotenregel	3-16
3.5	Grenzflächenbedingung für die Stromdichte	3-17
3.6	Der elektrische Widerstand	3-19
3.6.1	Formale Beschreibung der Temperaturabhängigkeit	3-21
3.6.2	Leistungsumsatz im Widerstand	3-22
3.6.3	Reihenschaltung von Widerständen	3-22
3.6.4	Parallelschaltung von Widerständen	3-23
3.7	Ideale Spannungs- und Stromquelle	3-23

3.8	Die Kirchhoffsche Maschenregel	3-25
4	Magnetfelder	4-1
4.1	Allgemeines	4-1
4.1.1	Magnetismus	4-1
4.1.2	Elektromagnetismus	4-2
4.2	Magnetfelder stationärer Ströme	4-2
4.2.1	Das Kreuzprodukt zweier Vektoren	4-2
4.3	Die Lorentzkraft	4-3
4.3.1	Die magnetische Flussdichte \vec{B}	4-3
4.3.2	Lorentzkraft auf linienartigen Leiter	4-5
4.3.3	Der magnetische Fluss Φ	4-6
4.4	Die Anregung stationärer Magnetfelder	4-6
4.4.1	Der Durchflutungssatz	4-7
4.5	Magnetfelder in Materie	4-7
4.5.1	Grundlegende Zusammenhänge aus der Mechanik	4-7
4.5.2	Magnetisches Dipolmoment und Magnetisierung	4-8
4.5.3	Magnetische Eigenschaften von Materie	4-9
4.5.4	Magnetische Erregung und Durchflutungssatz	4-10
4.5.5	Magnetische Suszeptibilität und Permeabilität	4-11
4.5.6	Einteilung magnetischer Werkstoffe	4-11
4.5.7	Grenzflächenbedingungen	4-14
4.6	Der magnetische Kreis	4-17
4.6.1	Ohmsches Gesetz des Magnetismus: Reluktanz	4-17
4.6.2	Der unverzweigte Magnetkreis: Maschenregel	4-18
4.6.3	Verzweigungen: Knotenregel	4-19
4.7	Induktivitätsbegriffe	4-20
4.7.1	Spulenfluss und Selbstinduktivität	4-20
4.7.2	Gegeninduktivität	4-21
4.8	Energie im magnetischen Feld	4-23
5	Transiente Magnetfelder	5-1
5.1	Allgemeines	5-1
5.1.1	Wirbelströme, Lenzsche Regel, Stromverdrängung	5-2
5.1.2	Leerlaufspannung	5-2
5.2	Ruheinduktion	5-3
5.2.1	Selbst- und Gegeninduktion	5-3
5.2.2	Der ideale Übertrager	5-4
5.3	Bewegungsinduktion	5-6

Symbolverzeichnis

$[\cdot]$	Maßeinheit einer phys. Größe
\cdot	Skalarprodukt
\dot{U}	Umlaufspannung
ρ	Massendichte
ρ	Raumladungsdichte
ρ	spezifischer Widerstand
σ	Flächenladungsdichte
σ, κ	elektrische Leitfähigkeit
τ	Linienladungsdichte
\times	Kreuzprodukt, äußeres Produkt
\vec{P}	elektrische Polarisierung
\vec{p}	elektrisches Dipolmoment
\vec{v}	Geschwindigkeit
\vec{v}_D	Driftgeschwindigkeit
$\{\cdot\}$	Zahlenwert einer phys. Größe
G	elektrischer Leitwert
I, i	elektrischer Strom
m	Masse
N	Teilchenzahl
R	elektrischer Widerstand
t	Zeit
U	elektrische Spannung
V	Volumen
A	Ampere, SI-Einheit des elektrischen Stroms
A	das Ampere; SI-Einheit der Stromstärke
C	Coulomb; SI-Maßeinheit der elektr. Ladung
cd	die Candela; SI-Einheit der Lichtstärke
K	das Kelvin; SI-Einheit der Temperatur
kg	das Kilogramm; SI-Einheit der Masse
m	der Meter; SI-Einheit der Länge
mol	das Mol; SI-Einheit der Stoffmenge
N	Newton; Einheit der Kraft
n	Teilchendichte

NIST National Institute of Standards and Technology
PTB Physikalisch-Technische Bundesanstalt
s die Sekunde; SI-Einheit der Zeit
SI internat. Einheitensystem
VZS Verbraucherzählpeilsystem

Kapitel 1

Einführung

1.1 Einordnung des Elektromagnetismus

Wie die Mechanik und die Thermodynamik (= Wärmelehre) stellt auch die Elektrizitätslehre eine Domäne (= Teilgebiet) der Physik dar. Diese ist die umfassendste der Naturwissenschaften und verfolgt das Ziel, Erscheinungen und Vorgänge in der Natur

- systematisch zu beobachten (Naturbeobachtung),
- zu messen (Quantifizierung),
- allgemein gültige Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und
- diese mathematisch zu beschreiben.

Zu den wichtigsten Leistungen der Physik zählen,

- dass ihre Experimente reproduzierbare Ergebnisse liefern, und
- dass ihre Theorien hohe Erklärungs- und Vorhersagekraft besitzen.

Weil alle physikalischen Theorien auf Erfahrungstatsachen beruhen, sind sie im Unterschied zu mathematischen Sätzen nicht allgemein beweisbar. Sie können jedoch experimentell widerlegt werden. Weiterhin beinhalten physikalische Theorien oftmals Idealisierungen, die ihren Geltungsbereich einschränken. Allgemein anerkannte und bewährte Theorien werden als physikalische Gesetze bezeichnet.

1.2 Physikalische Größen

Als physikalische Größen bezeichnet man jene Eigenschaften der Natur, die der physikalischen Methodik zugänglich sind. In Formeln kürzt man sie durch Buchstaben ab, für die es unverbindliche Konventionen gibt. Dennoch sollten, um Missverständnisse auszuschließen, in jeder wissenschaftlichen Arbeit alle Symbole vor ihrer ersten Verwendung ausdrücklich eingeführt werden.

Beispiel 1.2.1. Auszug aus einem fiktiven Aufsatz:

„Wir bezeichnen die Länge mit l , die Zeit mit t , den Druck mit p , die Temperatur mit T und die elektrische Ladung mit Q .“

1.2.1 Messen

Die Lehre vom Messen heißt *Metrologie*. Das Messen einer physikalischen Größe geschieht durch Vergleich einer unbekanntem Menge mit einer definierten Maßeinheit. Somit werden physikalische Größen durch ein Produkt von *Zahlenwert* und *Maßeinheit* quantifiziert. Für diese sind die Operatoren $\{\cdot\}$ und $[\cdot]$ gebräuchlich:

$$\{x\} := \text{Zahlenwert der physikalischen Größe } x, \quad (1.2.1a)$$

$$[x] := \text{Maßeinheit der physikalischen Größe } x. \quad (1.2.1b)$$

Daher gilt allgemein

$$x = \{x\}[x]. \quad (1.2.2)$$

Für Maßeinheiten gibt es standardisierte Kürzel, die üblicherweise nicht kursiv dargestellt werden.

Beispiel 1.2.2. Einen Sportwettkampf gewinnt, wer eine vorgegebene Weglänge l in der kürzesten Zeit t zurücklegt. Man misst:

$$\text{Weg} = 100 \text{ Meter}, \quad \text{Zeit} = 9.58 \text{ Sekunden} \quad (1.2.3)$$

$$l = 100 \text{ m}, \quad t = 9.58 \text{ s}, \quad (1.2.4)$$

$$\{l\} = 100, \quad \{t\} = 9.58, \quad (1.2.5)$$

$$[l] = \text{m}, \quad [t] = \text{s}. \quad (1.2.6)$$

Durch *Größengleichungen* lassen sich physikalische Zusammenhänge mathematisch formulieren und neuartige physikalische Größen einführen.

Im Falle einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung ist die Geschwindigkeit \vec{v} definiert als der zurückgelegte Weg \vec{l} bezogen auf die benötigte Zeit t :

$$\vec{v} := \frac{\vec{l}}{t}. \quad (1.2.7)$$

Durch Einsetzen von (1.2.2) folgt

$$\vec{v} := \frac{\vec{l}}{t} = \frac{\{\vec{l}\} [\vec{l}]}{\{t\} [t]} = \frac{\{\vec{l}\}}{\{t\}} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.2.8)$$

Man erkennt, dass sich die Einheit der Geschwindigkeit aus jenen für Länge und Zeit ableitet. Jene Einheiten, die nicht aus anderen ableitbar sind, heißen Basiseinheiten. Welchen physikalischen Größen Basiseinheiten beziehungsweise abgeleitete Einheiten zugeordnet sind, hängt vom verwendeten Einheitensystem ab. Für viele abgeleitete Einheiten sind eigene Namen gebräuchlich.

Beispiel 1.2.3 (Einheit der Kraft: Newton (N)). $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m} / \text{s}^2$.

Weil in Größengleichungen die jeweiligen Einheiten ausdrücklich angegeben werden, sollten Unklarheiten der Art

„Ist die Länge in Meter oder Kilometer einzusetzen?“

nicht auftreten. Weiterhin ermöglichen sie in mathematischen Herleitungen einfache Plausibilitätsprüfungen: Stimmt im Ergebnis die Einheit nicht, so muss etwas falsch sein.

In der Praxis werden auch einfache *Zahlenwertgleichungen* verwendet, wobei die zugrunde gelegten Einheiten häufig auf die Anwendung zugeschnitten sind. Im Fall von (1.2.8) erhält man

$$\{\vec{v}\} := \frac{\{\vec{l}\}}{\{t\}}. \quad (1.2.9)$$

Der Nachteil ist, dass die verwendeten Einheiten nicht ersichtlich sind. Daher sind Zahlenwertgleichungen schwer zu überprüfen, und ihre Anwendung ist fehleranfällig. Sie sollten im wissenschaftlichen Bereich nicht benutzt werden.

Beispiel 1.2.4 (Zahlenwertgleichung für die Geschwindigkeit).

$$v = 3.6 \frac{l}{t}. \quad (1.2.10)$$

Hierin bezeichnet v den skalaren Zahlenwert der Weglänge in m und t den Zahlenwert für die Zeit in Sekunden. Das Ergebnis v ist der skalare Zahlenwert für den Betrag der Geschwindigkeit in km/h. Wie in (1.2.10) angedeutet, ist in der Praxis eine Kennzeichnung, dass es sich um Zahlenwerte handelt, nicht üblich.

1.2.2 Das Internationale Einheitensystem

In der Europäischen Union ist im amtlichen und geschäftlichen Verkehr das *Internationale Einheitensystem* (*SI-System*; fr. *système international d'unités*) gesetzlich vorgeschrieben. Es hat bis zum 20.05.2019 auf den in Tab. 1.2.1 zusammengestellten Basisgrößen und Basiseinheiten beruht [1].

Allerdings erfolgt die Festlegung der Basiseinheiten per Konvention unter der Zielsetzung, Unsicherheiten zu minimieren. Sie unterliegt daher dem Stand der Messtechnik im Wandel der Zeit. Aktuell werden die früheren Basiseinheiten von den Naturkonstanten in Tab. 1.2.2 abgeleitet [2] [3]:

Definition 1.2.1 (Sekunde). Die Sekunde (s) ist die SI-Einheit der Zeit. Sie ist über die Cäsiumfrequenz $\Delta\nu_{Cs}$ definiert, das ist die Frequenz des ungestörten Hyperfeinübergangs des Grundzustands des Cäsium-Nuklids ^{133}Cs . Man legt fest:

$$\Delta\nu_{Cs} := 9192631770/\text{s}. \quad (1.2.11)$$

Tabelle 1.2.1: Basisgrößen und -einheiten des SI-Systems bis zum 20.05.2019

Größe	Zeichen	Basiseinheit	Zeichen
Länge	l	der Meter	m
Masse	m	das Kilogramm	kg
Zeit	t	die Sekunde	s
elektrischer Strom	I	das Ampere	A
Temperatur	T	das Kelvin	K
Lichtstärke	I_v	die Candela	cd
Stoffmenge	n	das Mol	mol

Tabelle 1.2.2: Naturkonstanten

Cäsiumfrequenz	$\Delta\nu_{Cs}$	9 192 631 770	s^{-1}
Vakuum-Lichtgeschwindigkeit	c	299 792 458	m / s
Planck-Konstante	h	$6.62\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}$	$kg\ m^2\ s^{-1}$
Elementarladung	e	$1.602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$	A s
Boltzmann-Konstante	k	$1.380\ 649 \cdot 10^{-23}$	$kg\ m^2\ s^{-2}\ K^{-1}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6.022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Photometr. Strahlungsäquiv.	K_{cd}	681	lm / W

Definition 1.2.2 (Meter). Der Meter (m) ist die SI-Einheit der Länge. Er ist über die Lichtgeschwindigkeit in Vakuum c definiert. Man legt fest:

$$c := 299\ 792\ 458\ \text{m/s.} \quad (1.2.12)$$

Definition 1.2.3 (Kilogramm). Das Kilogramm (kg) ist die SI-Einheit der Masse. Es ist über die Planck-Konstante h definiert. Man legt fest:

$$h := 6.626\ 070\ 15 \times 10^{-34}\ \text{kg}\ \text{m}^2/\text{s.} \quad (1.2.13)$$

Alt: ... ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps, der im Internationalen Büro für Maß und Gewicht (BIPM) (fr. *Bureau International des Poids et Mesures*) in der französischen Stadt Sèvres aufbewahrt wird.

Definition 1.2.4 (Ampere). Das Ampere (A) ist die SI-Einheit der elektrischen Stromstärke. Es ist über die Elementarladung e definiert, das ist der Betrag der Ladung des Elektrons. Man legt fest:

$$e := 1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19}\ \text{As.} \quad (1.2.14)$$

Alt: ... ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der durch zwei im Vakuum parallel im Abstand 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge elektrodynamisch die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorrufen würde.

Tabelle 1.2.3: Längenskala

	Typische Länge		
Durchmesser Atomkern	$(1 \dots 10) \cdot 10^{-15}$ m	1 ... 10	fm
Durchmesser Atom	$100 \cdot 10^{-12}$ m	100	pm
Strukturen Halbleiterelektronik	$> 10 \cdot 10^{-9}$ m	> 10	nm
Wellenlänge sichtbares Licht	$(380 \dots 750) \cdot 10^{-9}$ m	380 ... 750	nm
Durchmesser menschliches Haar	$(40 \dots 120) \cdot 10^{-6}$ m	40 ... 120	μ m
mittlerer Erddurchmesser	$12.7 \cdot 10^6$ m	12.7	Mm
Bahnradius geostationärer Satellit	$35.8 \cdot 10^6$ m	35.8	Mm
mittlerer Abstand Mond – Erde	$384 \cdot 10^6$ m	384	Mm
größter Abstand Erde – Sonne	$152 \cdot 10^9$ m	152	Gm
Abstand Erde – Alpha Centauri	$40 \cdot 10^{15}$ m	140	Pm
Durchmesser Milchstraße	$(1.6 \dots 1.9) \cdot 10^{21}$ m	1.6 ... 1.9	Zm

Tabelle 1.2.4: SI-Vorsätze

Name	Zeichen	Potenz	Name	Zeichen	Potenz
Deka	da	10^1	Dezi	d	10^{-1}
Hekto	h	10^2	Zenti	c	10^{-2}
Kilo	k	10^3	Milli	m	10^{-3}
Mega	M	10^6	Mikro	μ	10^{-6}
Giga	G	10^9	Nano	n	10^{-9}
Tera	T	10^{12}	Pico	p	10^{-12}
Peta	P	10^{15}	Femto	f	10^{-15}
Exa	E	10^{18}	Atto	a	10^{-18}
Zetta	Z	10^{21}	Zepto	z	10^{-21}

Die Festlegung der Maße ist ein nationales Hoheitsrecht. Das nationale Metrologieinstitut der Bundesrepublik Deutschland ist die Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB). Sie veröffentlicht die gesetzlichen Einheiten, und ihr obliegt die Maßverkörperung durch nationale Normale. Die entsprechende Behörde der U.S.A. ist das National Institute of Standards and Technology (NIST).

Abhängig vom betrachteten Objekt können Maßzahlen über viele Größenordnungen hinweg variieren. Dies verdeutlicht die Längenskala in Tab. 1.2.3. Zur einfacheren Darstellung dienen Dezimalvorsätze, die zusammen mit ihren Abkürzungen gesetzlich festgelegt worden sind. Eine Auswahl ist in Tab. 1.2.4 dargestellt. Man erkennt, dass als Vorsatz für *Mikro-* der griechische Kleinbuchstabe μ Verwendung findet. In Tabelle 1.2.5 sind alle griechischen Buchstaben zusammengefasst.

Tabelle 1.2.5: Griechische Buchstaben

Groß	Klein	Bezeichnung	Groß	Klein	Bezeichnung
A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π, ϖ	Pi
E	ϵ, ε	Epsilon	P	ρ, ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ, ς	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ, ϑ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Iota	Φ	ϕ, φ	Phi
K	κ, \varkappa	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

Kapitel 2

Das elektrostatische Feld

Als *statisch* bezeichnet man zeitlich unveränderliche Zustände. Somit umfasst die *Elektrostatik* all jene Effekte, die mit zeitlich unveränderlichen elektrischen Ladungen einhergehen.

2.1 Grundlegende Beobachtungen

Bereits im antiken Griechenland ist beobachtet worden, dass an einem Tuch geriebener Bernstein (griech.: Elektron) in der Nähe befindliche Gegenstände anzieht. Diese Kräfte sind mechanisch nicht erklärbar, und genauere Untersuchungen zeigen, dass sich Körper sowohl anziehen als auch abstoßen können: Elektrische Ladungen treten in zweierlei Polarität auf. Ihre Maßeinheit ist das Coulomb C:

$$1 \text{ C} := 1 \text{ As.} \quad (2.1.1)$$

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts n. Chr. hat sich gezeigt, dass die Grundbausteine der Materie, die Atome, aus einem Kern und einer Hülle bestehen, die sich aus Elementarteilchen zusammensetzen: Der Kern besteht aus elektrisch geladenen Protonen (p) sowie neutralen Neutronen (n) und die Hülle aus ebenfalls geladenen Elektronen (e^-). Tab. 2.1.1 zeigt, dass die Ladung des Elektrons als *negativ* festgelegt ist. Jedes ungeladene Atom enthält dieselbe Anzahl an Elektronen und Protonen, weil ihre Ladung betragsmäßig gleich ist. Die chemischen Eigenschaften eines Atoms werden fast ausschließlich durch die Anzahl der Protonen

Tabelle 2.1.1: Elementarteilchen und ihre Ladung

Teilchen	Symbol	Ladung
Elektron	e^-	$-1.602\,177 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Proton	p	$+1.602\,177 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Neutron	n	0 C

und in der Folge durch den Aufbau ihrer Elektronenhülle bestimmt. Atome derselben Protonenzahl aber unterschiedlicher Neutronenzahl bezeichnet man daher als *Isotope* desselben Elements. Ihr wesentlicher Unterschied ist die Atommasse. Geladene Atome mit einem Überschuss oder Mangel an Elektronen in ihrer Hülle heißen *Ionen*. Positiv geladene Ionen werden als *Kationen* und negativ geladene als *Anionen* bezeichnet.

Es stellt sich heraus, dass frei vorkommende Ladung stets in ganzzahligen Vielfachen von e auftritt, also *quantisiert* ist. Weil Zwischenwerte unmöglich sind, spricht man von einer *diskreten* Ladungsverteilung. Der Betrag der Ladung des Elektrons heißt daher auch Elementarladung:

$$\text{Elementarladung } e := 1.602\,177 \cdot 10^{-19} \text{ C.} \quad (2.1.2)$$

Es sei angemerkt, dass Quarks als Bausteine von Elementarteilchen die Ladung $\mp \frac{1}{3}e$ oder $\pm \frac{2}{3}e$ tragen. Sie sind jedoch niemals isoliert beobachtet worden.

Beispiel 2.1.1. Die Abkürzung ${}^6_3\text{Li}$ bezeichnet ein Isotop des chemischen Elements Lithium. Es besitzt die Massenzahl 6 und die Kernladungszahl 3. Die Massenzahl gibt die Zahl der Kernteilchen an, und die Kernladungszahl steht für die Protonenzahl. Demnach besitzt der Atomkern von ${}^6_3\text{Li}$ drei Neutronen.

2.1.1 Leiter und Nichtleiter

Elektrische Leiter sind Stoffe, in denen sich Ladungen über makroskopische Entfernungen bewegen können. Es gibt sehr unterschiedliche Leitungsmechanismen: In metallischen Leitern bilden die Hüllen der Atome ein gemeinsames Leitungsband aus. Hingegen sind in Ionenleitern dissoziierte (nicht aneinander gebundene) Ionen über makroskopische Entfernungen beweglich. Beispiele sind Salzschmelzen oder -lösungen in polaren Lösungsmitteln. In idealen Leitern erfolgt der Ladungstransport verlustlos. Dies geschieht im Aggregatzustand der Supraleitung. Er wird von verschiedenen metallischen und keramischen Stoffen unterhalb einer kritischen Temperatur, der Sprungtemperatur, eingenommen.

In *Nichtleitern* oder *Isolatoren* sind die Ladungsträger auf mikroskopischem Maßstab gebunden. In idealen Isolatoren sind keine makroskopische Ladungsbewegungen möglich.

Beispiel 2.1.2 (Wässrige Kochsalzlösung). Beim Lösen in Wasser zerfällt der ungeladene NaCl-Kristall in Na^+ -Kationen und Cl^- -Anionen.

2.2 Ladungserhaltung

Von grundlegender Bedeutung ist der folgende experimentelle Befund:

Satz 2.2.1 (Ladungserhaltung). *In jedem abgeschlossenen System ist die Gesamtheit aller Ladungen konstant. Ladung wird in Paaren gleichen Betrags und entgegengesetzter Polarität erzeugt und vernichtet.*

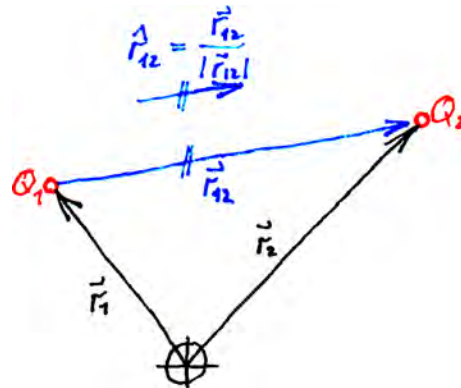


Abbildung 2.3.1: Anordnung zweier Punktladungen.

2.3 Coulomb-Kraft

Die Kraftwirkung zwischen geladenen Körpern wird als *Coulomb-Kraft* bezeichnet. Um diese zu quantifizieren, ist das Konzept der Punktladung zweckmäßig:

Definition 2.3.1 (Punktladung). Die Ladung eines punktförmigen Körpers, also eines Körpers ohne jegliche räumliche Ausdehnung.

Punktladungen sind Idealisierungen. Im Experiment werden sie durch geladene Körper angenähert, deren geometrische Ausdehnungen sehr viel kleiner als die übrigen Abmessungen der betrachteten Anordnung sind. Punktladungen führen zu der entscheidenden Vereinfachung, dass ihre Orte und Abstände klar definiert sind.

Bezeichnet man den Ortsvektor mit \vec{r} und den gerichteten Abstandsvektor von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 mit \vec{r}_{12} , so gilt

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (2.3.1)$$

Mit den Abkürzungen $|\vec{r}_{12}|$ für die euklidische Länge des Vektors und \hat{e}_{12} für den Einheitsvektor in Richtung \vec{r}_{12} , so folgt unmittelbar

$$\hat{e}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}. \quad (2.3.2)$$

Abb. 2.3.1 veranschaulicht die Zusammenhänge.

Betrachtet man zwei Punktladungen $Q_1(\vec{r}_1)$ und $Q_2(\vec{r}_2)$ im Vakuum, so findet man für die Kraft $\vec{F}(\vec{r}_2)$ auf Q_2 die folgenden Gesetzmäßigkeiten:

- Die Kraft verläuft längs der Verbindungslinie der Ladungen.
- Die Kraft ist indirekt proportional zum Quadrat des Ladungsabstands.
- Die Kraft ist proportional zu beiden Ladungen. Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, und ungleichnamige Ladungen ziehen sich an.

Satz 2.3.2 (Coulombsches Gesetz).

$$\vec{F}_C(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{e}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^2} Q_1(\vec{r}_1)Q_2(\vec{r}_2). \quad (2.3.3)$$

Der in (2.3.3) auftretende Proportionalitätsfaktor ϵ_0 heißt *Dielektrizitätskonstante des Vakuums*, und es ergibt sich

$$\epsilon_0 = 8.854\,187 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Vm}}. \quad (2.3.4)$$

Man kann zeigen, dass sich ϵ_0 exakt aus der Vakuumlichtgeschwindigkeit herleitet und daher mit keiner Unsicherheit behaftet ist.

Aufgabe 2.3.1. Recherchieren Sie das Gesetz für die Gravitationskraft zweier punktförmiger Massen und vergleichen Sie seine Struktur mit jener des Coulombschen Gesetzes (2.3.3).

2.3.1 Anordnung mehrerer Punktladungen

Für Anordnungen mehrerer Punktladungen findet man, dass sich die Kräfte zufolge der einzelnen Ladungen vektoriell überlagern: Es gilt das vektorielle Superpositionsprinzip.

Um eine einfache Nummerierung zu erhalten, wollen wir jene Ladung, an der wir die Kraft messen, besonders kennzeichnen: Wir nennen sie die Testladung Q_a und ihren Ort den Aufpunkt \vec{r}_a . Wir betrachten eine Anordnung bestehend aus der Testladung $Q_a(\vec{r}_a)$ und N weiteren Ladungen $Q_n(\vec{r}_n)$ mit $n = 1 \dots N$ im Vakuum. Die vektorielle Überlagerung der Einzelkräfte nach (2.3.3) liefert

$$\vec{F}_C(\vec{r}_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{e}_{1a}}{|\vec{r}_{1a}|^2} Q_1 Q_a + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{e}_{2a}}{|\vec{r}_{2a}|^2} Q_2 Q_a + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{e}_{Na}}{|\vec{r}_{Na}|^2} Q_N Q_a, \quad (2.3.5a)$$

$$\vec{F}_C(\vec{r}_a) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{e}_{na}}{|\vec{r}_{na}|^2} Q_n Q_a, \quad (2.3.5b)$$

$$\vec{F}_C(\vec{r}_a) = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{\hat{e}_{na}}{|\vec{r}_{na}|^2} Q_n. \quad (2.3.5c)$$

2.4 Elektrische Feldstärke und Feldbegriff

Das Coulombsche Gesetz (2.3.3) zeigt, dass die Kraft auf eine Testladung $Q_a(\vec{r}_a)$ der Testladung proportional ist. Bezieht man die Kraft auf die Ladung, so folgt

$$\frac{\vec{F}_C(\vec{r}_a)}{Q_a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{e}_{1a}}{|\vec{r}_{1a}|^2} Q_1, \quad (2.4.1a)$$

$$\frac{\vec{F}_C(\vec{r}_a)}{Q_a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{\hat{e}_{na}}{|\vec{r}_{na}|^2} Q_n. \quad (2.4.1b)$$

Bemerkenswerterweise ist die rechte Seite von der Testladung Q_a unabhängig. Sie beschreibt eine Eigenschaft im Punkt \vec{r}_a zufolge der verbliebenen Ladungen und wird als elektrische Feldstärke bezeichnet.

Definition 2.4.1 (Elektrische Feldstärke \vec{E}). Die Coulomb-Kraft \vec{F}_C bezogen auf eine verschwindend kleine Testladung:

$$\vec{E}(\vec{r}_a) := \lim_{Q_a \rightarrow 0} \frac{F_C(\vec{r}_a)}{Q_a}. \quad (2.4.2)$$

Da die Feldstärke nach (2.4.1) nicht von der Testladung abhängt, mag der Grenzübergang $Q_a \rightarrow 0$ in (2.4.2) unnötig erscheinen. Allerdings haben wir die Ladungen $Q_1 \dots Q_N$ stets als ortsfest angenommen. Durch Einbringen der Testladung wirkt auf sie eine zusätzliche Coulomb-Kraft, die zu Ladungsverschiebungen führen könnte. Die Voraussetzung einer verschwindend kleinen Testladung schließt solche Rückwirkungen aus.

Gemäß (2.4.2) und (2.4.1) lautet die elektrische Feldstärke im Punkt \vec{r}_a zufolge einer oder mehrerer Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{e}_{1a}}{|\vec{r}_{1a}|^2} Q_1, \quad (2.4.3a)$$

$$\vec{E}(\vec{r}_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{\hat{e}_{na}}{|\vec{r}_{na}|^2} Q_n. \quad (2.4.3b)$$

Weil die elektrische Feldstärke aus der Kraft abgeleitet ist, bezeichnet man sie als eine *Intensitätsgröße*. Sie ist in jedem beliebigen Raumpunkt auswertbar und beschreibt in ihrem Verlauf – als Feld – die zugrundeliegende Ladungsverteilung.

Allgemein bezeichnet man als *Feld* die räumliche Verteilung einer physikalischen Größe. Ihrer mathematischen Darstellung nach unterscheidet man Skalarfelder, Vektorfelder und andere. Beispiele skalarer Felder sind das Temperaturfeld, das Feld der Massendichte und jenes des Gravitationspotenzials.

Gl. (2.4.3a) zeigt, dass die elektrische Feldstärke von den positiven Ladungen ausgeht und zu den negativen Ladungen hinweist.

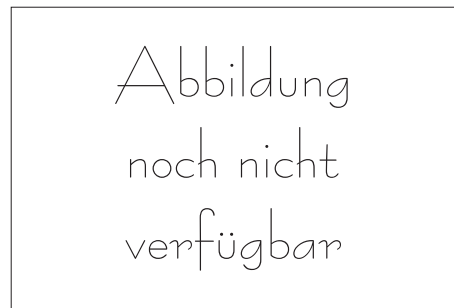


Abbildung 2.4.1: Experimentell aufgenommene Feldbilder. Quelle: [5, p. 26]

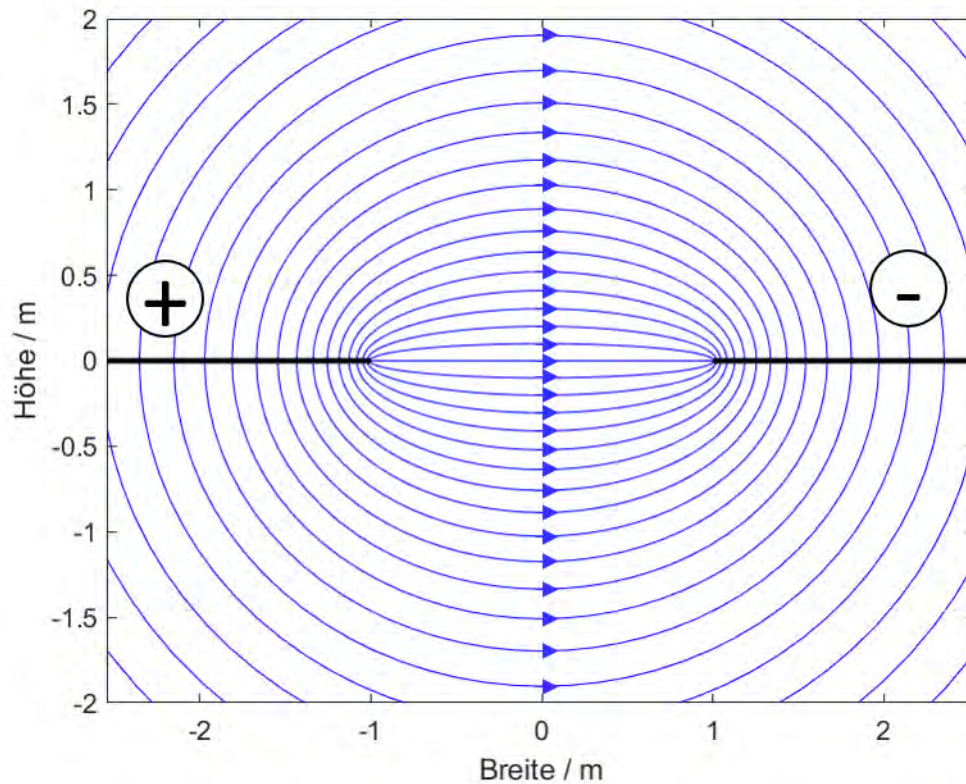


Abbildung 2.4.2: Feldlinien zweier gegengleich geladener leitfähiger Platten.

2.4.1 Veranschaulichung des elektrischen Feldstärkefeldes

Die Tatsache, dass sich kleine Körper bevorzugt parallel zur elektrischen Feldstärke ausrichten, lässt sich experimentell zur Veranschaulichung des Feldes ausnutzen. Ein Beispiel zeigt Abb. 2.4.1.

Feldlinien erhält man, indem man von einem beliebigen Punkt ausgehend in kleinen Schritten in Richtung der Feldstärke voranschreitet. Diese Richtung wird durch Pfeile bezeichnet. Der Betrag der Feldstärke wird durch die Dichte der

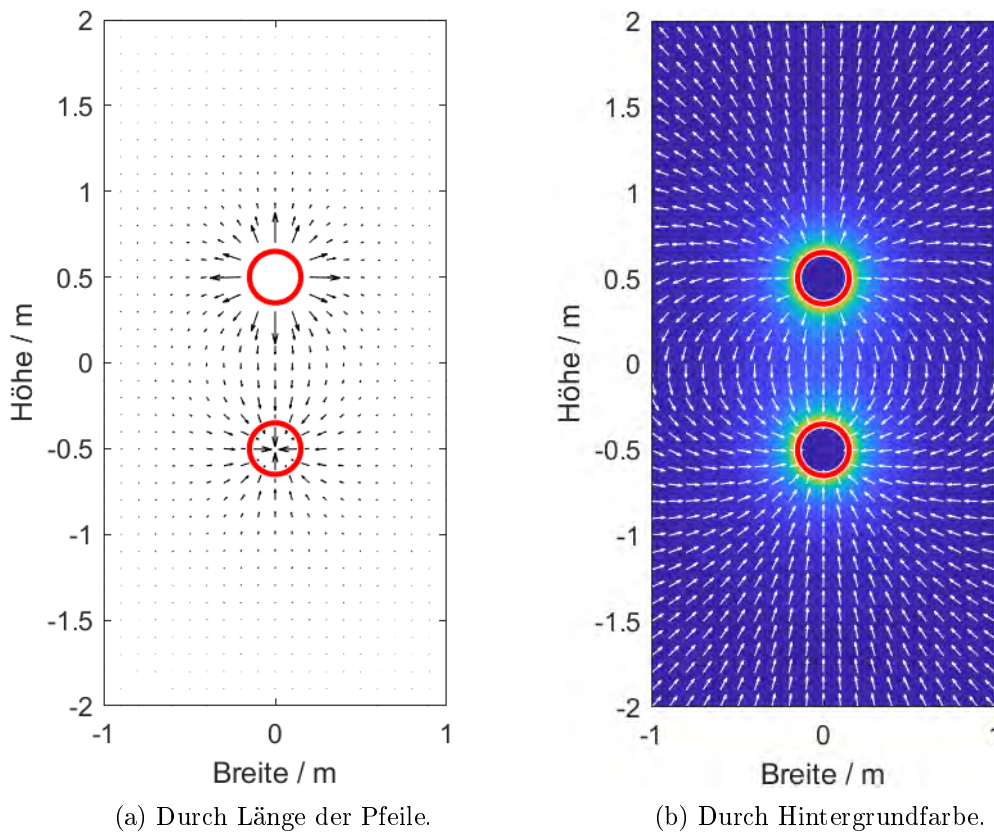


Abbildung 2.4.3: Am Computer erstellte Feldbilder zweier gegengleich geladener Kugeln mit unterschiedlicher Codierung des Betrags der Feldstärke.

Feldlinien beschrieben. Abb. 2.4.2 verdeutlicht, dass die elektrischen Feldlinien normal auf die leitfähigen Elektroden stehen, an Orten positiver Ladung beginnen und an negativen Ladungen enden.

Computerprogramme stellen Vektorfelder häufig durch Pfeile auf einem regelmäßigen Gitter dar; siehe Abb. 2.4.3.

2.4.2 Leitfähige Körper

Im Inneren eines leitfähigen Körpers verschwindet im statischen Fall die elektrische Feldstärke. Wäre dies nicht der Fall, so träte eine Coulomb-Kraft auf, unter deren Einfluss sich Ladungsträger bewegten. Aus demselben Grund kommt es ausschließlich an der Oberfläche zu einer Akkumulation (= Ansammlung) von Ladungsträgern.

An der Grenzfläche zwischen einem Nichtleiter und einem Leiter ist die elektrische Feldstärke stets normal zur Grenzfläche gerichtet. Gäbe es eine Tangentialkomponente, so träte im Leiter eine Coulomb-Kraft auf, unter deren Einfluss sich Ladungsträger tangential zur Grenzfläche bewegten. Der einsetzende Aus-

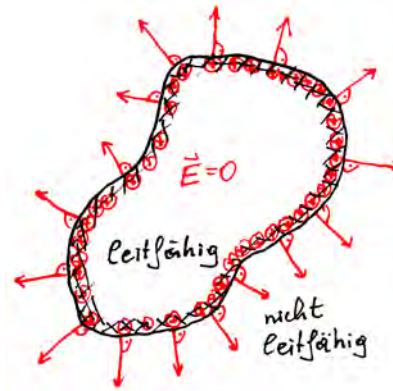


Abbildung 2.4.4: Elektrisch geladener leitfähiger Körper: Das Innere ist feldfrei, die Ladung bildet eine dünne Schicht an der Oberfläche, und die elektrische Feldstärke im Vakuum steht normal zur Grenzfläche.

gleichsvorgang endete, wenn die resultierende Kraft und damit die Feldstärke verschwänden.

Abb. 2.4.4 zeigt diese Effekte am Beispiel eines geladenen leitfähigen Körpers im Vakuum: Das Innere ist feld- und ladungsfrei, und die aufgebrauchte Ladung bildet eine dünne Schicht an der Oberfläche. Man spricht von einer *Flächenladung*. Im Vakuum steht die elektrische Feldstärke senkrecht zur Grenzfläche.

2.5 Kontinuierliche Ladungsverteilungen

Um die Gesamtladung eines makroskopischen Körpers zu ermitteln, müsste man über alle geladenen Elementarteilchen gewichtet mit ihrer jeweiligen Ladung summieren. Allerdings ist die Anzahl der Teilchen sehr groß, und ihre genauen Orte sind selbst in homogenen (= gleichförmigen) Stoffen nicht bekannt.

Es ist die große Teilchenanzahl, die einen eleganten Ausweg bietet: Bei vergleichbaren Bedingungen (Temperatur, Druck) hat sich gezeigt, dass Körper desselben Stoffs und Volumens im Mittel gleich viele Teilchen enthalten und somit im Mittel auch dieselbe Ladung aufweisen. Weiterhin wird es mit steigender Teilchenzahl immer unwahrscheinlicher, eine vorgegebene Abweichung vom Mittelwert zu messen. Der Mittelwert stellt daher den *Erwartungswert* dar. Diese Aussagen beschreiben qualitativ das *Gesetz der großen Zahl*. Zudem werden die Abstufungen in ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung zunehmend irrelevant.

Solange alle Abmessungen wesentlich größer als jene der Teilchen sind, und die Teilchenzahl groß ist, ist daher die Modellvorstellung zulässig, dass die Ladung beliebige Werte annehmen kann. Man spricht von einer *kontinuierlichen* Größe. Weiterhin dürfen für makroskopische Betrachtungen die Teilchenzahl und auch Stoffeigenschaften wie Masse oder Ladung über das betrachtete Gebiet verschmiert werden. Dies führt zum Begriff der Dichte als Stoffeigenschaft. Seien V das betrachtete Volumen, $N(V)$ die Teilchenzahl, $m(V)$ die Masse und $Q(V)$ die Ladung. Dann gelten für homogene Stoffeigenschaften:

$$\text{räumliche Teilchendichte } n := \frac{N}{V} \quad \text{mit } [n] = \frac{1}{\text{m}^3}, \quad (2.5.1a)$$

$$\text{Massendichte } \rho := \frac{m}{V} \quad \text{mit } [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad (2.5.1b)$$

$$\text{Raumladungsdichte } \rho := \frac{Q}{V} \quad \text{mit } [\rho] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3} = \frac{\text{As}}{\text{m}^3}. \quad (2.5.1c)$$

Man beachte, dass für die Massendichte und die Raumladungsdichte dasselbe Symbol ρ üblich ist. Ist die Dichte – etwa als Stoffeigenschaft – bekannt, so folgt

$$N = n V, \quad (2.5.2a)$$

$$m = \rho V, \quad (2.5.2b)$$

$$Q = \rho V. \quad (2.5.2c)$$

Beispiel 2.5.1. Die Massendichte von Messing beträgt 8.73 g/cm^3 . Welche Masse hat ein Rundstab von 12 cm Durchmesser und 40 cm Länge? Zweckmäßigerweise rechnet man in m und kg: $V = 0.00452 \text{ m}^3$; $\rho = 8\,730 \text{ kg/m}^3$. Mit (2.5.2b) folgt $m = 39.49 \text{ kg}$.

Im Fall einer inhomogenen (= ungleichmäßigen) Ladungsverteilung kann man sich in folgender Weise behelfen: Man zerlegt das Volumen in kleine Elemente $\Delta V(\vec{r}_i)$ mit Mittelpunkt \vec{r}_i und Ladung ΔQ_i . Nimmt man die Ladungsverteilung als stückweise konstant an, so folgt für die Raumladungsdichte ρ_i die

Näherung

$$\rho_i \approx \frac{\Delta Q_i}{\Delta V(\vec{r}_i)}. \quad (2.5.3)$$

Summieren über alle Elemente liefert

$$Q(V) = \sum_i \Delta Q_i \approx \sum_i \rho_i V(\vec{r}_i). \quad (2.5.4)$$

Lässt man die Größe der Volumenelemente gegen Null streben, so wird die Darstellung der Raumladungsdichte exakt. Somit lautet ihre allgemeine Definition

$$\text{Raumladungsdichte } \rho(\vec{r}_i) := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_i}{\Delta V(\vec{r}_i)} = \left. \frac{dQ}{dV} \right|_{\vec{r}_i}. \quad (2.5.5a)$$

Die Größe dQ bzw. dV bezeichnet man als *differenzielles* oder *infinitesimales* Ladungs- bzw. Volumenelement oder *-inkrement*. Die Verteilung $\rho(\vec{r})$ bildet das Feld der Ladungsdichte. Sie ist für makroskopische Untersuchungen oftmals als Ortsfunktion bekannt.

Auf gleiche Weise definiert man für flächen- und linienartige Ladungsverteilungen mit dem Flächenelement dA bzw. dem Linienelement dl die Flächenladungsdichte σ und die Linienladungsdichte τ :

$$\text{Flächenladungsdichte } \sigma(\vec{r}_i) := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_i}{\Delta A(\vec{r}_i)} = \left. \frac{dQ}{dA} \right|_{\vec{r}_i}, \quad (2.5.5b)$$

$$\text{Linienladungsdichte } \tau(\vec{r}_i) := \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_i}{\Delta l(\vec{r}_i)} = \left. \frac{dQ}{dl} \right|_{\vec{r}_i}. \quad (2.5.5c)$$

Das differenzielle Ladungselement dQ folgt durch Umstellen von (2.5.5) als

$$dQ(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) dV \quad \text{für räumliche Verteilungen,} \quad (2.5.6)$$

$$dQ(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) dA \quad \text{für flächenhafte Verteilungen,} \quad (2.5.7)$$

$$dQ(\vec{r}) = \tau(\vec{r}) dl \quad \text{für linienartige Verteilungen.} \quad (2.5.8)$$

Die Gesamtladung ergibt sich durch Summieren über die Ladungselemente wie in (2.5.4) – allerdings über unendlich viele, infinitesimal kleine. Um dies zu kennzeichnen, benutzt man anstelle des Summenzeichens Σ ein stilisiertes S , das Integralzeichen \int :

$$Q = \int_Q dQ = \int_V \rho(\vec{r}) dV, \quad (2.5.9)$$

$$Q = \int_Q dQ = \int_A \sigma(\vec{r}) dA, \quad (2.5.10)$$

$$Q = \int_Q dQ = \int_l \tau(\vec{r}) dl. \quad (2.5.11)$$

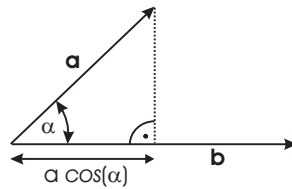


Abbildung 2.6.1: Geometrische Interpretation des Skalarprodukts.

Anmerkung 2.5.1. Das Feldstärkefeld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung folgt aus (2.4.3b), indem man die Punktladungen durch infinitesimale Ladungselemente dQ an den Quellpunkten \vec{r}_q und die Summe durch das Integral ersetzt:

$$d\vec{E}(\vec{r}_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{e}_{qa}}{|\vec{r}_{qa}|^2} dQ(\vec{r}_q), \quad (2.5.12)$$

$$\vec{E}(\vec{r}_a) = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{\hat{e}_{qa}}{|\vec{r}_{qa}|^2} dQ(\vec{r}_q). \quad (2.5.13)$$

Insbesondere erhält man für eine Raumladungsverteilung $\rho(\vec{r}_q)$ im Quellvolumen V_q durch Einsetzen von (2.5.9) die Beziehung

$$\vec{E}(\vec{r}_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_q} \frac{\hat{e}_{qa}}{|\vec{r}_{qa}|^2} \rho(\vec{r}_q) dV \quad (2.5.14)$$

Aufgabe 2.5.1. Die Grenzübergänge in (2.5.5) führen auf infinitesimale Gebiete, die in der Realität wegen ihrer verschwindenden Größe keinen einzigen Ladungsträger enthalten. Begründen Sie die Zulässigkeit der gewählten Vorgehensweise.

2.6 Die elektrische Spannung

2.6.1 Das euklidische Skalarprodukt

Definition 2.6.1 (Euklidisches Skalarprodukt). Seien \vec{a} und \vec{b} zwei Vektoren in \mathbb{R}^3 und α der von ihnen aufgespannte Winkel. Als *Euklidisches Skalarprodukt* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bezeichnet man die Abbildung

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha. \quad (2.6.1)$$

Abb. 2.6.1 veranschaulicht, dass $\vec{a} \cdot \vec{b}$ der Normalprojektion von \vec{a} auf \vec{b} multipliziert mit der Länge von \vec{b} entspricht. Für einen Einheitsvektor \hat{e}_b gilt daher

$$\vec{a} \cdot \hat{e}_b = |\vec{a}| \cos \alpha. \quad (2.6.2)$$

Dies beschreibt die Komponente von \vec{a} in Richtung \hat{e}_b . Für $\vec{b} = \vec{a}$ erhält man

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2. \quad (2.6.3)$$

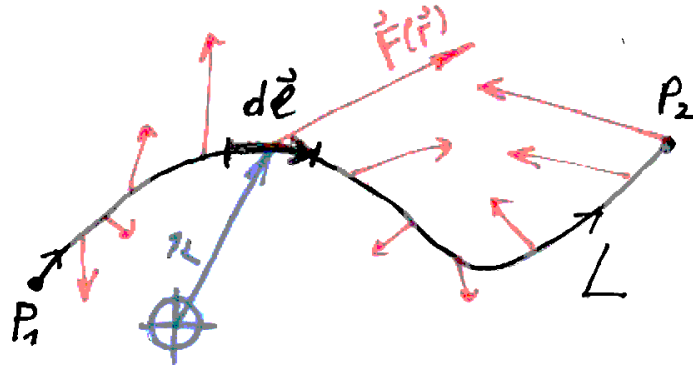


Abbildung 2.6.2: Kraftverlauf längs eines Weges.

In kartesischen Koordinaten gilt die einfache Berechnungsformel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.6.4)$$

Aus (2.6.1) folgen für nicht verschwindende Vektoren die Äquivalenzen

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \iff \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \text{Kollinearität,} \quad (2.6.5)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{Orthogonalität.} \quad (2.6.6)$$

Das Skalarprodukt ist positiv definit,

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0, \\ \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}, \end{cases} \quad (2.6.7)$$

und für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und Skalare $\sigma \in \mathbb{R}$ gelten die Rechenregeln

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{Symmetrie,} \quad (2.6.8a)$$

$$\sigma(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\sigma\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\sigma\vec{b}) \quad \text{Assoziativität,} \quad (2.6.8b)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \text{Distributivität.} \quad (2.6.8c)$$

2.6.2 Arbeit im elektrischen Feld

Wie in Abb. 2.6.2 dargestellt, ist bei der Berechnung der Arbeit W zu beachten, dass der Weg L durch eine beliebige Kurve beschrieben sein kann, und dass die Kraft \vec{F} längs des Weges im Allgemeinen Betrag und Richtung ändert.

Betrachtet man jedoch ein infinitesimales Linienelement $d\vec{l}$ um den Punkt \vec{r} , so darf wegen seiner verschwindend kleinen Länge die Kraft als konstant angenommen werden. Dann gilt für die längs $d\vec{l}$ geleistete mechanische Arbeit dW gemäß „Kraft in Wegrichtung mal Weglänge“ die Beziehung

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}. \quad (2.6.9)$$

Die gesamte Arbeit erhält man durch Summieren über alle Wegelemente als

$$W(L) = \int_L \vec{F}_m(\vec{r}) \cdot d\vec{l}. \quad (2.6.10)$$

Bewegt sich eine konstante Ladung Q längs eines Weges L in einem gegebenen elektrostatischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$, so verrichtet die Coulomb-Kraft F_C Arbeit. Einsetzen der Definitionsgleichung für die Feldstärke (2.4.2) führt auf

$$W(L) = Q \int_L \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}. \quad (2.6.11)$$

Positive Werte bedeuten, dass das elektrische Feld Arbeit verrichtet und hierdurch Feldenergie verliert. Negative Werte zeigen an, dass bei der Bewegung mechanische Arbeit gegen die Coulomb-Kraft geleistet wird, sodass sich die elektrische Feldenergie erhöht. In (2.6.11) hängt das Linienintegral nicht von der bewegten Ladung Q ab. Man definiert:

Definition 2.6.2 (Elektrische Spannung). Das Linienintegral der elektrischen Feldstärke längs eines Weges L wird als elektrische Spannung $U(L)$ bezeichnet. Sie wird in Volt gemessen:

$$U(L) := \int_L \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}, \quad [U] = \text{V}. \quad (2.6.12)$$

Wegen (2.6.11) gilt für die vom Feld geleistete Arbeit

$$W(L) = QU(L), \quad (2.6.13)$$

und man erhält für das Volt die Darstellung

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{N m}}{\text{A s}} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^3}. \quad (2.6.14)$$

Somit ergibt sich als Einheit der Feldstärke

$$[\vec{E}] = \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (2.6.15)$$

Abbildung 2.6.3: Gerichtete Wege zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 .

2.6.3 Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke

Definition 2.6.3 (Zirkulation). Das Linienintegral eines Vektorfeldes $\vec{E}(\vec{r})$ längs eines geschlossenen Weges L :

$$\oint_L \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}. \quad (2.6.16)$$

Der Ring unterstreicht, dass der Integrationspfad geschlossen ist.

Aus der Form der Coulomb-Kraft lässt sich der folgende Satz herleiten, der für die weiteren Betrachtungen von grundlegender Bedeutung ist:

Satz 2.6.4 (Energieerhaltung). *Das elektrostatische Feld ist konservativ (= energieerhaltend): Durchläuft eine Ladung Q einen geschlossenen Weg im elektrostatischen Feld, so wird hierbei insgesamt keine Arbeit verrichtet.*

Einsetzen in die Darstellungen für die Arbeit (2.6.11) und (2.6.13) liefert

$$\overset{\circ}{W} \stackrel{(2.6.13)}{=} Q \overset{\circ}{U}(L) \stackrel{(2.6.13)}{=} Q \oint_L \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0. \quad (2.6.17)$$

Somit verschwinden in der Elektrostatik die Umlaufspannung $\overset{\circ}{U}$ und die Zirkulation der Feldstärke längs beliebiger geschlossener Pfade L :

$$\overset{\circ}{U}(L) \equiv 0, \quad (2.6.18)$$

$$\oint_L \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \equiv 0. \quad (2.6.19)$$

Felder verschwindender Zirkulation heißen *wirbelfrei*. Somit ist die elektrische Feldstärke im statischen Fall wirbelfrei: Sie besitzt keine geschlossenen Feldlinien, sondern bildet ein reines Quelle-Senke-Feld, dessen Feldlinien in den positiven Ladungen beginnen und in den negativen enden.

Abb. 2.6.3 zeigt zwei Punkte P_1 und P_2 , zwei unterschiedliche Pfade L_{12}^a und L_{12}^b von P_1 nach P_2 und einen Rückweg L_{21} . Wegen (2.6.18) verschwindet die

Umlaufspannung längs jeden geschlossenen Weges. Wählt man zwei Umläufe mit gemeinsamem Rückweg,

$$\dot{U}(L_{12}^a \cup L_{21}) = U(L_{12}^a) + U(L_{21}) = 0, \quad (2.6.20a)$$

$$\dot{U}(L_{12}^b \cup L_{21}) = U(L_{12}^b) + U(L_{21}) = 0, \quad (2.6.20b)$$

so folgt durch Subtraktion der Umlaufspannungen

$$U(L_{12}^a) = U(L_{12}^b). \quad (2.6.21)$$

Weil die Wege L_{12}^a und L_{12}^b beliebig sind, gilt

Satz 2.6.5 (Wegunabhängigkeit der Spannung). *Im elektrostatischen Feld ist die Spannung von einem Anfangspunkt P_1 zu einem Endpunkt P_2 vom gewählten Weg unabhängig. Man schreibt*

$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}. \quad (2.6.22)$$

2.7 Das elektrische Skalarpotenzial

Weil die Spannung nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, lässt sich diese elegant aus einem Skalarfeld ableiten, dem Feld des elektrischen Skalarpotenzials $\varphi(\vec{r})$. Hierzu weist man jedem Punkt des Raums einen Skalarwert so zu, dass sich die Spannung als negative Potenzialdifferenz ergibt:

$$\begin{aligned} U_{12} &= -(\varphi(P_2) - \varphi(P_1)) \\ &= \varphi(P_1) - \varphi(P_2). \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Auf die Wahl des negativen Vorzeichens wird später noch eingegangen.

Ist die Feldstärke \vec{E} bekannt, so lässt sich das Potenzialfeld in zwei Schritten konstruieren:

1. Man wählt einen beliebigen Bezugspunkt P_0 und weist ihm einen beliebigen Potenzialwert φ_0 zu:

$$\varphi(P_0) := \varphi_0. \quad (2.7.2)$$

Häufig wählt man den Bezugspunkt im Unendlichen, an einem leitfähigen Gehäuse oder auf der Erdoberfläche. Das übliche Bezugspotenzial beträgt $\varphi_0 = 0$ V.

2. Eine Bestimmungsgleichung für jeden beliebigen Punkt P_i erhält man durch Anpassen der Indices, Umstellen von (2.7.1) und Einsetzen von (2.6.22):

$$U_{0i} = \varphi_0 - \varphi(P_i), \quad (2.7.3)$$

$$\varphi(P_i) \stackrel{(2.7.1)}{=} \varphi_0 - U_{0i}, \quad (2.7.4)$$

$$\varphi(P_i) \stackrel{(2.6.22)}{=} \varphi_0 - \int_{P_0}^{P_i} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}. \quad (2.7.5)$$

Es sei angemerkt, dass das Potenzialfeld einer Ladungsnordnung auch direkt – ohne den Umweg über die Feldstärke – berechenbar ist. Auch die Umkehrung, das ist die Berechnung der Feldstärke aus dem Potenzialfeld, ist möglich. Man benötigt allerdings hier noch nicht verfügbare Mittel der Vektoranalysis, konkret den grad-Operator.

2.7.1 Äquipotenzialflächen

Definition 2.7.1 (Äquipotenzialfläche). Eine Fläche gleichen Potentials.

Bewegt man eine Ladung Q zwischen zwei auf einer Äquipotenzialfläche liegenden Punkten P_1 und P_2 , so verrichtet das Feld an ihr keine Arbeit:

$$W_{12} = Q (\varphi (P_1) - \varphi (P_2)) = 0. \quad (2.7.6)$$

Weil dies für alle Wege auf der Potenzialfläche der Fall ist, gilt wegen (2.6.11):

Satz 2.7.2. *Die Coulomb-Kraft und damit die elektrische Feldstärke stehen normal zu den Äquipotenzialflächen.*

Aus Unterabschnitt 2.4.2 ist bekannt, dass die Feldstärke stets normal auf leitfähige Körper steht. Daher ändert sich das Feldbild einer gegebenen Anordnung nicht, wenn man eine Äquipotenzialfläche mit einer dünnen, ungeladenen Metallfolie belegt.

2.8 Ladung und elektrischer Fluss

2.8.1 Klassifizierung von Flächen

Definition 2.8.1 (Orientierbare Fläche). Eine Fläche mit zwei unterscheidbaren Seiten: der Innen- und der Außenseite.

Definition 2.8.2 (Orientierte Fläche). Eine orientierbare Fläche mit festgelegter Orientierung. Dies geschieht durch Zuweisen eines der zwei möglichen Flächennormalvektorfelder.

Definition 2.8.3 (Außenseite). Jene Seite einer orientierten Fläche, von der der Flächennormalvektor wegweist.

Definition 2.8.4 (Geschlossene Fläche, Hüllfläche). Eine Fläche ohne Rand.

Eine zusammenhängende geschlossene Fläche teilt den Raum in zwei nicht-überlappende zusammenhängende Teile: den Innenraum und den sich ins Unendliche erstreckenden Außenraum.

Definition 2.8.5 (Berandung, Rand). Die Berandung eines dreidimensionalen Körpers Ω ist die Menge aller Flächen, die den Körper gegen das Äußere abgrenzen. Sie wird mit $\partial\Omega$ bezeichnet. Die Orientierung der Berandung wird so gewählt, dass sie vom Körper weg in das Äußere weist.

Die Berandung eines Körpers besteht aus einer geschlossenen Fläche oder, wenn der Körper innere Höhlen besitzt, aus mehreren geschlossenen Flächen.

Aufgabe 2.8.1 (Möbiusband). Verdrehen Sie die beiden Enden eines Papierstreifens um 180° gegeneinander und kleben Sie diese aneinander. Die resultierende Fläche heißt *Möbiusband*. Zeigen Sie experimentell, dass das Möbiusband nicht orientierbar ist.

Aufgabe 2.8.2 (Kugelschale). Die Berandung einer Kugelschale besteht aus zwei Komponenten: einer äußeren und einer inneren Sphäre. Wiesen sie diesen gemäß Def. 2.8.5 Flächennormalvektoren zu.

2.8.2 Fluss und Flussdichte

Das Flusskonzept ist den Zusammenhängen an einer von einer Flüssigkeit durchströmten Fläche entlehnt. Die räumliche Verteilung der Geschwindigkeit \vec{v} bildet ein Vektorfeld, das Flussdichtefeld. Der zugehörige Fluss ist das durch die Fläche pro Zeiteinheit strömende Flüssigkeitsvolumen. Er ist eine skalare Größe.

Abb. 2.8.1 veranschaulicht, dass zum Fluss F durch die Fläche \vec{A} nur die Komponente v_n der Geschwindigkeit in Richtung des Flächennormalvektors \hat{n} beiträgt. Daher gilt im Fall einer ebenen Fläche und konstanter Flussdichte

$$F(\vec{A}) = v_n |\vec{A}| = \vec{v} \cdot \hat{n} |\vec{A}|, \quad (2.8.1)$$

$$F(\vec{A}) = \vec{v} \cdot \vec{A}. \quad (2.8.2)$$

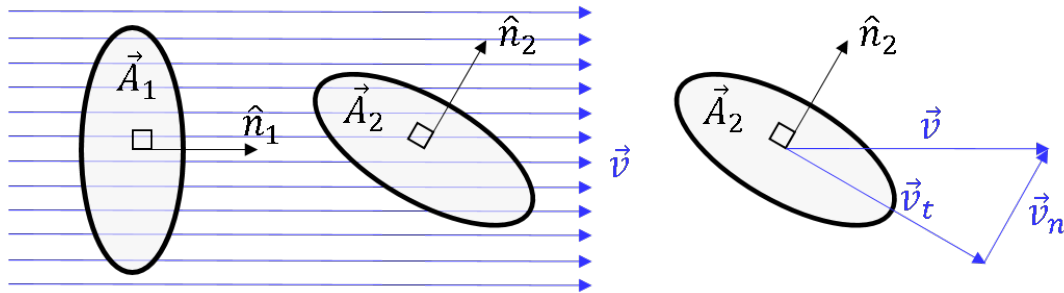


Abbildung 2.8.1: Fluss und Flussdichte: Zum Fluss durch eine Fläche trägt nur die Komponente der Flussdichte in Richtung der Flächennormale bei.

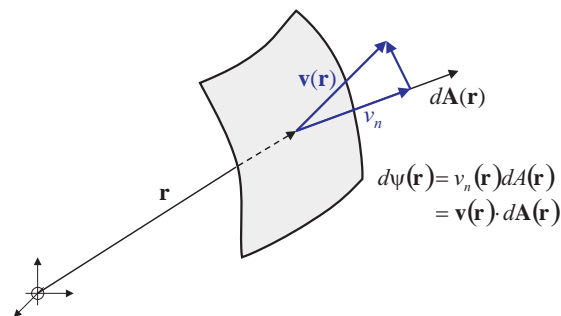


Abbildung 2.8.2: Flussinkrement $d\psi$ durch infinitesimales Flächenelement.

Im allgemeinen Fall einer gekrümmten Fläche, die von einem inhomogenen Flussdichtefeldes durchsetzt wird, zerteilt man die Fläche in kleine Flächenelemente $\Delta\vec{A}_i$, in denen man die Flussdichte \vec{v}_i jeweils konstant annimmt.

Wegen (2.8.2) gilt für den Teilfluss ΔF_i die Näherung

$$\Delta F_i \approx \vec{v}_i \cdot \Delta\vec{A}_i, \quad (2.8.3)$$

und Aufsummieren über alle Flusselemente liefert

$$F(\vec{A}) = \sum_i \Delta F_i \approx \sum_i \vec{v}_i \cdot \Delta\vec{A}_i. \quad (2.8.4)$$

Für infinitesimal kleine Flusselemente dF bzw. Flächenelemente dA verschwindet der Fehler,

$$dF = \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}, \quad (2.8.5)$$

und Aufsummieren (Integration) ergibt

$$F(\vec{A}) = \int_A dF = \int_A \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}. \quad (2.8.6)$$

Die graphische Darstellung des Flusses erfolgt häufig über Flussröhren:

Definition 2.8.6 (Flussröhre). Eine Röhre, deren Mantelfläche durch keinen Fluss durchdrungen wird.

Hieraus folgt unmittelbar, dass der Fluss durch alle Querschnittsflächen einer Flussröhre derselbe ist. Der besseren Vergleichbarkeit wegen fordert man üblicherweise auch, dass alle Flussröhren den gleichen Fluss führen.

2.8.3 Elektrische Flussbilanz – Faradaysches Gesetz

Die zugrundeliegende Idee ist, dass elektrische Ladungen ein Feld der elektrischen Flussdichte \vec{D} erregen. Nach (2.8.6) ergibt sich der elektrische Fluss ψ als

$$\psi(A) = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}. \quad (2.8.7)$$

Der elektrische Fluss dient der Ladungsmessung. Für jedes Gebiet Ω mit Berandung $\partial\Omega$ soll der Hüllfluss $\dot{\psi}(\partial\Omega)$ die Gesamtheit der eingeschlossenen *ableitbaren* Ladungen $Q(\Omega)$ ergeben:

$$\dot{\psi}(\partial\Omega) = Q(\Omega). \quad (2.8.8a)$$

Durch Einsetzen von (2.8.7) und (2.5.9) erhält man für den Fall einer räumlichen Ladungsverteilung

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{\Omega} \rho \, d\Omega. \quad (2.8.8b)$$

Eq. (2.8.8) ist eine Bilanzgleichung für den elektrischen Fluss. Sie ist von fundamentaler Bedeutung und wird auch als die integrale Darstellung des *Gaußschen Satzes der Elektrostatik* oder des *Faradayschen Gesetzes* bezeichnet. Der Ring $\dot{\psi}$ und das Ringintegral \oint unterstreichen, dass der Fluss nicht durch eine beliebige Fläche, sondern durch die Berandung eines Gebietes ermittelt wird.

Somit stellen die positiven Ladungen die Quellen und die negativen Ladungen die Senken des elektrischen Flusses dar. Für die Einheiten des elektrischen Flusses und der Flussdichte folgen

$$[\psi] = 1\text{C} = 1\text{As}, \quad (2.8.9)$$

$$[\vec{D}] = 1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}. \quad (2.8.10)$$

2.8.4 Berechnung der elektrischen Flussdichte

Man betrachte eine Punktladung Q im Vakuum. Aus Symmetriegründen ist es zweckmäßig, sie im Mittelpunkt eines Kugelkoordinatensystems (r, θ, ϕ) zu platzieren. Dann ist die Flussdichte radial gerichtet und nur von der radialen Koordinate abhängig:

$$\vec{D} = D_r(r)\hat{e}_r. \quad (2.8.11)$$

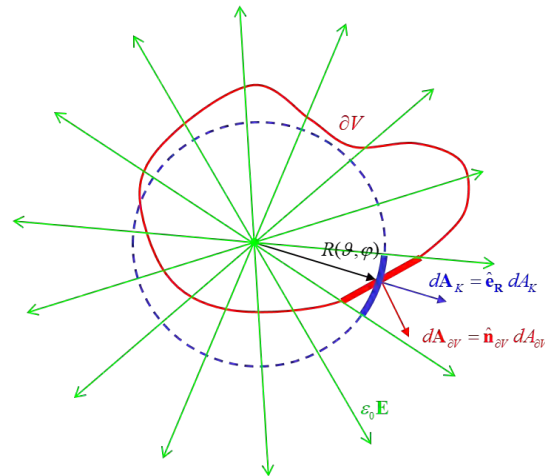


Abbildung 2.8.3: Hüllfluss einer Punktladung durch eine Kugelfläche (blau).

Daher steht die Flussdichte normal zu jeder Kugelfläche A_K mit Radius r um den Ursprung und ist auf dieser konstant. Abb. 2.8.3 veranschaulicht diese Zusammenhänge. Der Hüllfluss $\dot{\psi}(A_K)$ führt auf

$$\dot{\psi}(A_K) \stackrel{(2.8.7)}{=} \oint_{A_K} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \oint_{A_K} D_r(r) \underbrace{\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r}_{=1} dA. \quad (2.8.12)$$

Weil die Flussdichtekomponente D_r nur von der radialen Koordinate r abhängt, und diese auf der Kugelfläche konstant ist, darf D_r vor das Integral gezogen werden:

$$\dot{\psi}(A_K) = D_r \oint_{A_K} dA = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Fläche}} D_r \stackrel{(2.8.8a)}{=} Q. \quad (2.8.13)$$

Umstellen von (2.8.13) ergibt die Flussdichte

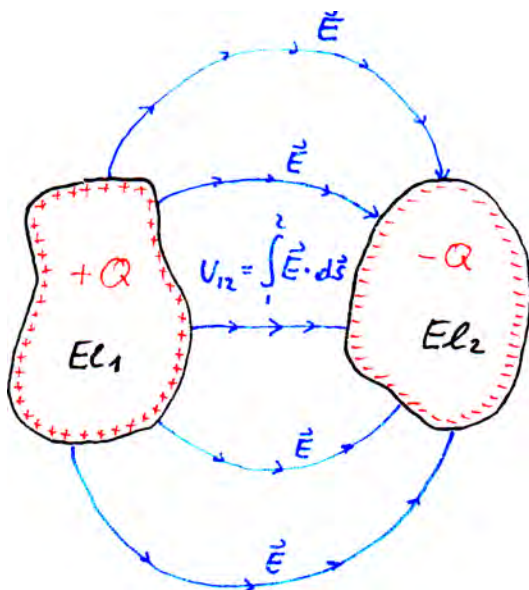
$$D_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad (2.8.14)$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{e}_r, \quad (2.8.15)$$

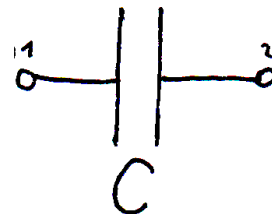
und Vergleich mit der Feldstärke der Punktladung (2.4.3a) führt auf

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (2.8.16)$$

Wie in Abb. 2.8.3 angedeutet, kann man zeigen, dass der Hüllfluss von der Wahl der Hüllfläche unabhängig ist, solange diese den Ort der Ladung umschließt. Die Beziehung (2.8.16) gilt daher im Vakuum für beliebige Hüllflächen und wegen der Gültigkeit des Superpositionsprinzips für beliebige Ladungsverteilungen, also ganz allgemein. Daher ist die Flussdichte unmittelbar aus der Feldstärke ableitbar und somit zur Behandlung von Ladungsanordnungen im Vakuum unnötig!! Ihr voller Wert wird bei der Behandlung elektrostatischer Felder in Nichtleitern klar werden und beruht auf der Tatsache, dass sie nur die *ableitbaren* Ladungen misst.



(a) Struktur.



(b) Schaltungssymbol.

Abbildung 2.9.1: Anordnung zweier entgegengesetzt geladener Elektroden und Schaltungssymbol.

2.9 Die elektrische Kapazität

Definition 2.9.1 (Differenzielle Größen). Feldgrößen, die auf infinitesimal kleinen geometrischen Objekten definiert sind.

Hierzu zählen das Skalarpotenzial, die Feldstärke, die Fluss- und die Ladungsdichte.

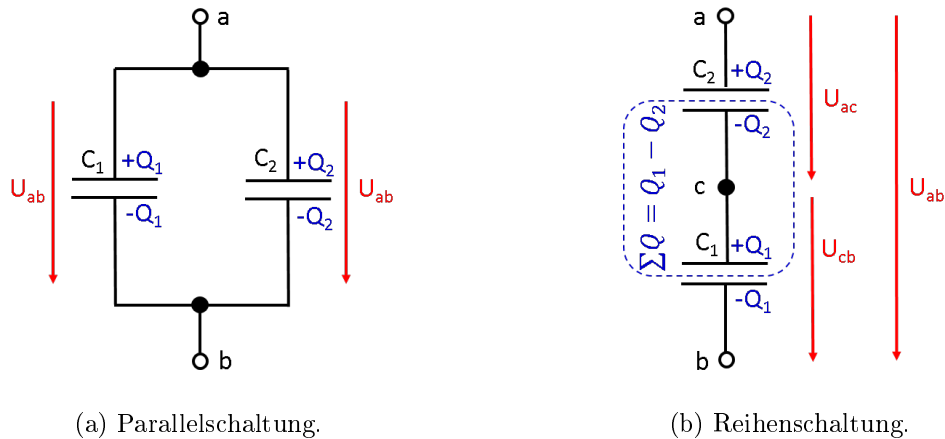
Definition 2.9.2 (Integrale Größen). Integrale Größen sind Kenngrößen, die sich durch Integration differenzieller Größen über makroskopische geometrische Objekte ergeben.

Hierzu zählen die Ladung und die Spannung. Später werden wir die Energie als wichtige integrale Größe kennenlernen. Für praktische Anwendungen sind die integralen Kenngrößen in der Regel wesentlich wichtiger als die differenziellen.

Definition 2.9.3 (Elektrode). Elektrisch leitfähiger Körper.

Abb. 2.9.1 zeigt eine Anordnung zweier von einander isolierter Elektroden El_1 und El_2 mit entgegengesetzt gleich großen Ladungen $+Q$ und $-Q$. Zwischen den Elektroden bildet sich ein elektrisches Feld aus, das von der positiven zur negativen Elektrode gerichtet ist. Die zugehörige integrale Größe ist die Spannung U_{12} .

Verdoppelt man die Ladungen, so verdoppelt sich aufgrund der Linearität der Coulomb-Kraft auch der Betrag des Feldstärkefeldes, während seine Richtung unverändert bleibt. Damit verdoppelt sich auch die Spannung zwischen den Elektroden.



(a) Parallelschaltung.

(b) Reihenschaltung.

Abbildung 2.9.2: Schaltplan: Verschaltung von Kapazitäten.

Definition 2.9.4 (Kapazität C). Der Quotient von Ladung und Spannung der Anordnung zweier entgegengesetzt geladener Elektroden:

$$C := \frac{Q_1}{U_{12}} = \frac{Q_2}{U_{21}} \quad \text{mit } Q_2 = -Q_1. \quad (2.9.1)$$

Die Kapazität wird in Farad (F) gemessen:

$$[C] = 1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}} = 1 \frac{\text{As}}{\text{V}}. \quad (2.9.2)$$

In der Schaltungstechnik wird die Bezeichnung *Kapazität* für das der beschriebenen Anordnung zugeordnete Netzwerkelement verwendet: Es beschreibt einen idealen Ladungsspeicher mit zwei isolierten Anschlüssen.

Definition 2.9.5 (Kondensator). Elektrisches Bauelement zur Realisierung des Netzwerkelements *Kapazität*.

Reale Kondensatoren weisen Unvollkommenheiten auf: Insbesondere kommt es zum Ladungsausgleich durch das Innere des Isolators und an seiner Oberfläche. Man spricht von *Leckströmen*. Weil die Zuleitungen und die Elektroden nicht ideal leitfähig sind, entstehen beim Laden und Entladen Leitungsverluste.

Die Kapazität eines Kondensators ist die wichtigste integrale Kenngröße eines Kondensators und beschreibt sein Ladungsspeichervermögen. Sie hängt von der Geometrie der Anordnung und dem Isolator zwischen den Elektroden ab.

2.9.1 Verschaltung von Kapazitäten

Wie in Abb. 2.9.2 dargestellt, gibt es zwei grundsätzlich unterschiedliche Arten, zwei Kondensatoren bzw. Kapazitäten C_1 und C_2 zu verschalten: die *Parallelschaltung* aus Abb. 2.9.2a und die *Reihenschaltung* aus Abb. 2.9.2b. In beiden Fällen wird vorausgesetzt, dass die beiden Kapazitäten weit genug von einander entfernt sind, dass ihre gegenseitige Beeinflussung vernachlässigbar ist.

Parallelschaltung

Das wesentliche Kennzeichen der Parallelschaltung ist, dass an allen Kapazitäten dieselbe Spannung anliegt.

Wenn wie in Abb. 2.9.2a die Klemmenspannung U_{ab} anliegt, dann tragen die mit der Klemme a verbundenen Elektroden wegen (2.9.1) die Ladungen

$$Q_1 = C_1 U_{ab}, \quad (2.9.3)$$

$$Q_2 = C_2 U_{ab} \quad (2.9.4)$$

Die Gesamtladung Q_p und die Gesamtkapazität C_p betragen daher

$$Q_p = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) U_{ab}, \quad (2.9.5)$$

$$C_p = \frac{Q_p}{U_{ab}} = C_1 + C_2. \quad (2.9.6)$$

Auf dieselbe Weise erhält man für die Parallelschaltung von N Kapazitäten

$$C_p = C_1 + C_2 + \dots + C_N. \quad (2.9.7)$$

Serienschaltung

Abb. 2.9.2b zeigt die betrachtete Anordnung. Die blaue Strichlinie deutet eine Hüllfläche um die miteinander verbundenen Elektroden an. Für die Summe der eingeschlossenen Ladungen gilt

$$\sum Q = Q_1 - Q_2. \quad (2.9.8)$$

Sind die Kapazitäten vor der Verschaltung ungeladen, so muss die verschwinden. Daher sind die Ladungen Q_1 und Q_2 gleich groß.

$$\sum Q \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_1 = Q_2 =: Q_s, \quad (2.9.9)$$

Schreibt man Q_s für die Elektrodenladung, so folgen mit (2.9.1) die Spannungen

$$U_{cb} = \frac{Q_s}{C_1} \quad \text{an } C_1, \quad U_{ac} = \frac{Q_s}{C_2} \quad \text{an } C_2. \quad (2.9.10)$$

Die Klemmenspannung U_{ab} beträgt somit

$$U_{ab} = U_{ac} + U_{cb} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q_s, \quad (2.9.11)$$

und für die Gesamtkapazität der Serienschaltung C_s gilt

$$\frac{U_{ab}}{Q_s} = \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{bzw.} \quad C_s = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}. \quad (2.9.12)$$

Sind N Kapazitäten in Serie geschaltet, so legt man um jedes der verbundenen Elektrodenpaare eine Hüllfläche. Sind sie vor der Verschaltung ungeladen gewesen, so muss die jeweilige Gesamtladung verschwinden:

$$Q_1 - Q_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_2 = Q_1, \quad (2.9.13)$$

$$Q_2 - Q_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_3 = Q_2, \quad (2.9.14)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$Q_{N-1} - Q_N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_N = Q_{N-1}. \quad (2.9.15)$$

Wieder sind alle Elektrodenladungen gleich. Bezeichnet man diese wieder mit Q_s ,

$$Q_s = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_N, \quad (2.9.16)$$

so erhält man für die Klemmenspannung U_{ab} und die Gesamtkapazität

$$U_{ab} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) Q_s, \quad (2.9.17)$$

$$\frac{U_{ab}}{Q_s} = \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}. \quad (2.9.18)$$

2.10 Elektrische Influenz

Wird ein leitfähiger Körper in ein elektrisches Feld gebracht, so wirken auf seine Ladungsträger Coulombkräfte. Dies führt zu einer Ladungstrennung, bis

- im Inneren die Gesamtkraft verschwinden, und
- an der Oberfläche die Tangentialkomponenten der Kraft verschwinden.

Dieser Effekt wird *Influenz* genannt. Er lässt sich in den im Folgenden beschriebenen Versuchen nachweisen und wird in *Influenzmaschinen* zur Erzeugung hoher Gleichspannungen ausgenutzt. Zwar besitzen Influenzmaschinen keine technische Bedeutung mehr, jedoch hat ihre Funktionsweise großen Erklärungswert.

2.10.1 Leitfähiges Einfachplättchen

Man betrachte einen Parallelplattenkondensator mit Plattenfläche A und -abstand h in Luft oder im Vakuum; siehe Abb. 2.10.1a. Die Plattenabmessungen seien groß gegenüber h .

Beträgt die Spannung zwischen den Platten U , so bildet sich zwischen den Platten ein homogenes elektrisches Feld \vec{E}_1 mit

$$|\vec{E}_1| = \frac{U}{h} \quad (2.10.1)$$

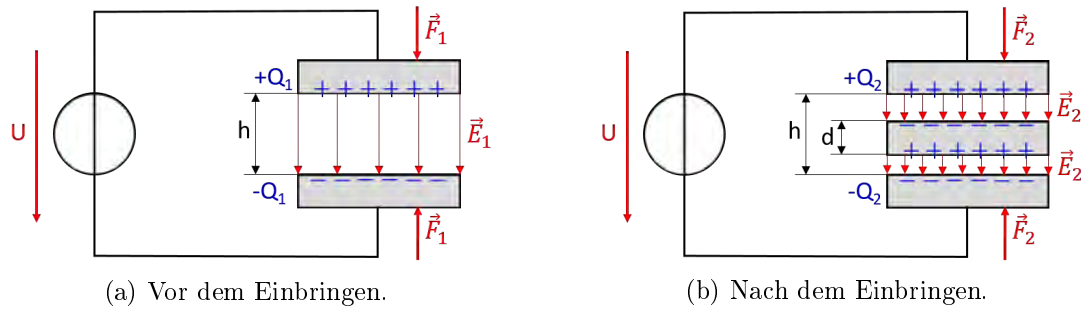


Abbildung 2.10.1: Einbringen einer leitfähigen Platte in einen Kondensator an einer Spannungsquelle.

aus (Randstörungen vernachlässigt). Die Kapazität C_1 und die Ladung Q_1 auf jeder der Kondensatorplatten betragen

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{h}, \tag{2.10.2}$$

$$Q_1 = C_1 U = \varepsilon_0 \frac{A}{h} U. \tag{2.10.3}$$

Beide Beziehungen sind aus der Übung bekannt.

Versuch 1: konstante Spannung

Vorgehensweise: Man legt den Kondensator an eine Gleichspannungsquelle und misst die Coulomb-Kraft auf eine der Platten. Bei angelegter Spannung führt man eine leitfähige Platte („Einfachplättchen“) der Dicke $d < h$ senkrecht zur Feldstärke in den Kondensator ein und misst nochmals die Kraft. Abb. 2.10.1 veranschaulicht den Versuch.

Beobachtungen: Nach Einbringen des Einfachplättchens sind die Kapazität, die Ladung auf den Kondensatorplatten und die Coulomb-Kraft auf sie größer.

Erklärung: Weil die Spannung fest vorgegeben ist, ist es zweckmäßig, die Kraft auf jede der Kondensatorplatten durch Geometriegrößen und die Spannung auszudrücken. Weil die Feldstärke \vec{E} im Inneren zu gleichen Teilen von den Ladungen der beiden Platten hervorgerufen wird, darf bei der Berechnung der Coulomb-Kraft F nur $\frac{\vec{E}}{2}$ angewandt werden. Im Grundzustand gilt daher

$$|\vec{F}_1| = Q \frac{|E_1|}{2} \stackrel{(2.9.1)}{\stackrel{(2.10.1)}{=}} \frac{1}{2} (CU) \left(\frac{U}{h} \right) = \frac{1}{2} C \frac{U^2}{h} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A U^2}{h} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A \frac{U^2}{h^2}. \tag{2.10.4}$$

Wird die leitfähige Platte eingebracht, so wirkt auf sie die Coulomb-Kraft. Diese trennt die beweglichen Ladungsträger, bis das Gesamtfeld im Platteninneren verschwindet. Dabei werden auf ihrer Oberfläche zwei Flächenladungen

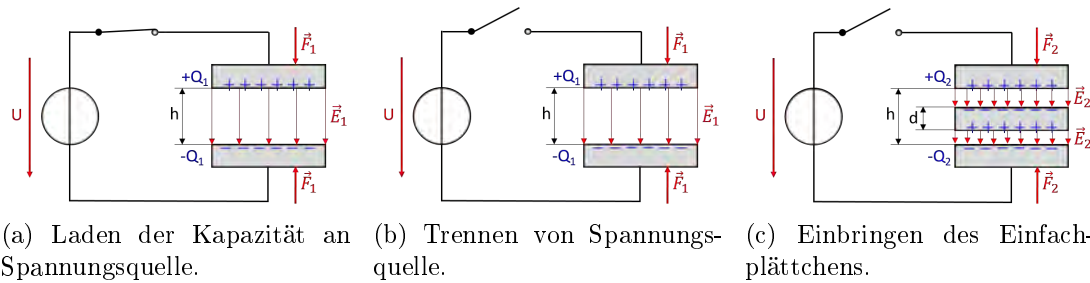


Abbildung 2.10.2: Einbringen einer leitfähigen Platte in einen Kondensator mit konstanter Elektrodenladung.

influenziert, deren Betrag den Ladungen auf den Kondensatorplatten entspricht. Die entstehende Struktur ist eine Serienschaltung zweier Kapazitäten mit Gesamtabstand $d - h$. Entsprechend lauten die Kapazität C_2 , die Plattenladung Q_2 und der Betrag der Kraft \vec{F}_2

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{(h - d)}, \quad (2.10.5)$$

$$Q_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{(h - d)} U, \quad (2.10.6)$$

$$|\vec{F}_2| = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A \frac{U^2}{(h - d)^2}. \quad (2.10.7)$$

Die Vergrößerung der Ladung auf den Platten, $Q_2 > Q_1$, geschieht dadurch, dass während des Einführens des Einfachplättchens ein Ladestrom von der Spannungsquelle fließt. Beim Entfernen der Platte fließt dieselbe Ladung als Entladestrom in die Spannungsquelle zurück.

Versuch 2: konstante Ladung

Vorgehensweise: Nachdem der Kondensator auf die Spannung U geladen worden ist, wird die Spannungsversorgung abgeklemmt. Bei abgeklemmter Spannungsquelle führt man eine leitfähige Platte („Einfachplättchen“) der Dicke $d < h$ senkrecht zur Feldstärke in den Kondensator ein und misst die Spannung zwischen den Platten.

Beobachtungen: Nach dem Einbringen des Einfachplättchens sinkt die Platten-spannung ab, während die elektrische Feldstärke unverändert bleibt. Wird das Plättchen entfernt, steigt die Spannung wieder an.

Erklärung: Nach dem Abklemmen der Spannungsquelle trägt jede der beiden Kondensatorplatten eine Ladung vom Betrag

$$|Q| = C_1 U. \quad (2.10.8)$$

Weil die Ladung nirgendwohin abfließen kann, bleibt sie auch nach dem Einführen des Plättchens erhalten. Weil hierbei die Kapazität auf C_2 laut (2.10.5) ansteigt, stellt sich eine Klemmenspannung U_2 gemäß

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} U = \frac{h-d}{h} U < U \quad (2.10.9)$$

ein. Weil die Ladung konstant bleibt, gilt dies auch für die Flussdichte und weiterhin wegen $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ auch für die Feldstärke. Ebenso lässt sich die Feldstärke \vec{E}_2 aus der Spannung U_2 nach (2.10.9) bestimmen: Weil die Feldstärke homogen ist, und der Plattenabstand bei eingeführtem Plättchen $h-d$ beträgt, gilt

$$|\vec{E}_2| = \frac{1}{h-d} U_2 = \frac{1}{h-d} \frac{h-d}{h} U = \frac{U}{h} \stackrel{(2.10.1)}{=} |\vec{E}_1|. \quad (2.10.10)$$

Nach dem Entfernen des Plättchens beträgt die Kapazität wieder C_1 , und man erhält die ursprüngliche Spannung U . In der Realität werden die beschriebenen Zusammenhänge nur näherungsweise gemessen, weil reale Kondensatoren Leckströme aufweisen.

Aufgabe 2.10.1. Wie ändert sich in Versuch 2 beim Einbringen des Einfachplättchens die Coulomb-Kraft auf die Kondensatorplatten?

2.10.2 Leitfähiges Doppelplättchen

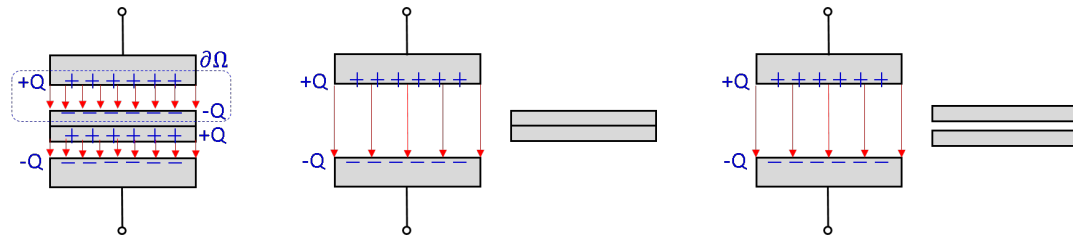
Dies sind die klassische Experimente zur Trennung influenzierter Ladungen. Als Doppelplättchen bezeichnet man die Anordnung zweier aufeinander liegender und sich berührender dünner Platten.

Versuch 1: Trennung des Doppelplättchens außerhalb des Feldes

Vorgehensweise: Wie in Abb. 2.10.3a wird ein leitfähiges Doppelplättchen normal zu den Feldlinien zwischen die Platten eines geladenen Kondensators eingebracht. Es wird aus dem Kondensator entfernt (Abb. 2.10.3b) und außerhalb des Feldgebiets in zwei Einzelplättchen getrennt; siehe Abb. 2.10.3c.

Beobachtung: Nach der Trennung der beiden Platten außerhalb des Feldgebiets sind elektrisch neutral.

Erklärung: Trägt die obere Kondensatorplatte in Abb. 2.10.3 die Ladung Q , so wird auf der ihr zugewandten Seite des Doppelplättchens aufgrund der Coulomb-Kraft die Ladung $-Q$ influenziert. Dies wird einsichtig, wenn man eine zylindrische Hüllfläche $\partial\Omega$ wie in Abb. 2.10.3a wählt. Ihre Grund- und Deckflächen liegen innerhalb leitfähiger Körper und somit in feldfreien Gebieten, und ihr Mantel verläuft außerhalb des Feldgebiets bzw. parallel zur Feldstärke. Somit verschwindet

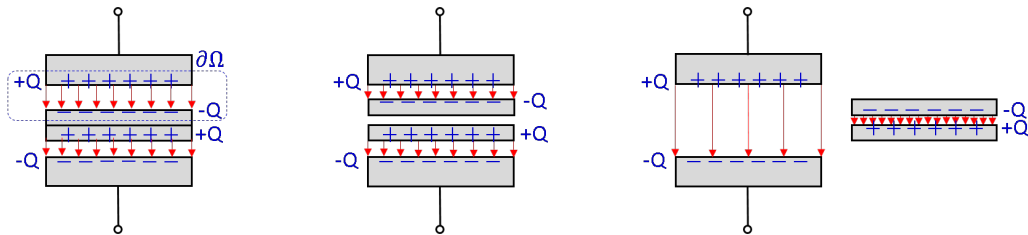


(a) Leitfähig verbundenes Doppelplättchen im Feld.

(b) Entfernen des leitfähig verbundenen Doppelplättchens aus dem Feld: Ladungsausgleich.

(c) Trennung des Doppelplättchens außerhalb des Feldes.

Abbildung 2.10.3: Leitfähiges Doppelplättchen 1: Trennung außerhalb des Feldes führt zu elektrisch neutralen Plättchen.



(a) Leitfähig verbundenes Doppelplättchen im Feld.

(b) Trennung im Feld: Ladungstrennung.

(c) Entfernen der getrennten Plättchen: Ladungserhaltung.

Abbildung 2.10.4: Leitfähiges Doppelplättchen 2: Trennung innerhalb des Feldes führt zu geladenen Plättchen.

der elektrische Hüllfluss $\dot{\psi}(\partial\Omega)$, sodass die im eingeschlossenen Gebiet Ω enthaltene Gesamtladung $Q(\Omega)$ null sein muss:

$$\dot{\psi}(\partial\Omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(\Omega) = 0. \quad (2.10.11)$$

Entfernt man das Doppelplättchen aus dem Feld, so wirkt keine Coulomb-Kraft auf sie, und die Ladungen gleichen sich aus. Daran ändert sich nichts, wenn man die beiden Teilplättchen trennt.

Versuch 2: Trennung des Doppelplättchens innerhalb des Feldes

Vorgehensweise: Wie in Abb. 2.10.4a wird ein leitfähiges Doppelplättchen normal zu den Feldlinien zwischen die Platten eines geladenen Kondensators eingebracht. Es wird im Feldgebiet in zwei Einzelplättchen getrennt (Abb. 2.10.4b). Diese werden getrennt aus dem Feldgebiet entnommen; siehe Abb. 2.10.4c.

Beobachtungen: Nach dem Trennen ist im Kondensator das Gebiet zwischen den Einzelplättchen feldfrei. Nach dem getrennten Entnehmen aus dem Feldgebiet trägt das Einzelplättchen, das der positiven Kondensatorelektrode mit Ladung $+Q$ zugewandt gewesen ist, die Ladung $-Q$ und das andere die Ladung $+Q$.

Erklärung: Im Feld werden auf den Hälften des Doppelplättchens die Ladungen $\pm Q$ induziert. Daher trägt das der positiven Elektrode des Kondensators zugewandte Plättchen auch nach der Trennung die Ladung $-Q$. Das Gebiet zwischen den beiden Plättchen ist ladungsfrei und von feldfreien Gebieten – den Einzelplättchen und dem Raum außerhalb des Kondensators (Vernachlässigung von Randstörungen) – umgeben. Es ist daher feldfrei. Weil die Ladungen der getrennten Plättchen nirgendwohin abfließen können, bleiben sie auch nach dem Entnehmen aus dem Feldgebiet des Kondensators erhalten.

2.10.3 Der Faradaysche Becherversuch

Es ist bereits bekannt, dass ein ladungsfreier Hohlraum in einem leitfähigen Körper im statischen Fall feldfrei ist. Dies ist in guter Näherung auch der Fall, wenn der Hohlraum durch ein kleines Loch von außen zugänglich ist, wie in dem leitfähigen „Becher“ in Abb. 2.10.5. Der im Folgenden beschriebene Influenzversuch dient dem experimentellen Nachweis der Influenzladung; er veranschaulicht die Schirmwirkung elektrisch leitfähiger Körper und zeigt einen technisch nutzbaren Weg der Ladungsübertragung auf.

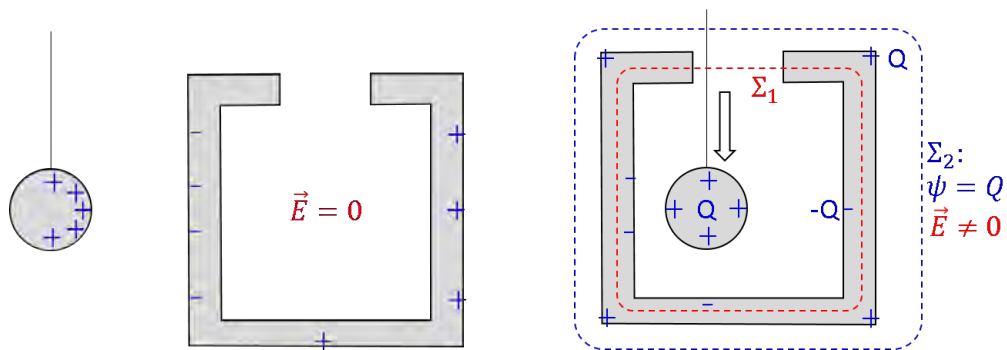
Versuch 1: geladene Kugel neben Becher

Vorgehensweise: Eine an einem isolierenden Faden wird eine elektrisch geladene leitfähige Kugel wird an einem isolierenden Faden in die Nähe eines ungeladenen leitfähigen Bechers gebracht.

Beobachtungen: Der Becher insgesamt bleibt ungeladen, und der Hohlraum in seinem Inneren bleibt feldfrei.

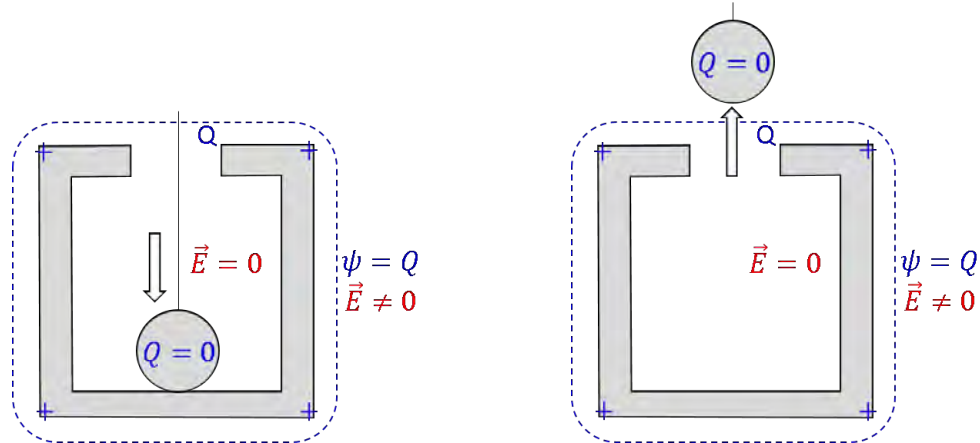
Erklärung: Die Coulomb-Kraft zufolge der geladenen Kugel führt im leitfähigen Becher zu einer Verschiebung der freien Ladungsträger. Ein neuer statischer Zustand wird erreicht, wenn die Kraft im Inneren des Bechermaterials verschwindet bzw. an der Oberfläche nur eine Normalkomponente aufweist, und Einschwingvorgänge abgeklungen sind. Dann verschwinden im leitfähigen Material die Feldstärke und die Flussdichte. Insbesondere hat die Flussdichte dort weder Quellen noch Senken, sodass es im Material zu keiner Ladungsanhäufung kommt. An der Außenseite des Bechers bilden sich Flächenladungen aus, die wegen der Ladungserhaltung in der Summe null ergeben. Der Hohlraum im Inneren des Bechers ist näherungsweise feldfrei, weil er keine Ladungen enthält und – abgesehen vom Loch – von einem leitfähigen Körper umgeben ist.

Man erkennt, dass eine leitfähige Hülle das von ihr eingeschlossene Gebiet vor äußeren elektrischen Feldern abschirmt. Dies gilt in guter Näherung auch, wenn man die Hülle durch ein Drahtgeflecht ersetzt (*Faradayischer Käfig*).



(a) Geladene Kugel neben Becher: Feld im Becherinneren verschwindet.

(b) Geladene Kugel im Becher: Feld im Äußeren ist unabhängig von Position der Kugel.



(c) Kugel berührt Kugelinneres: Ladungen fließen nach außen ab. Becherinneres ist feldfrei.

(d) Entfernung der entladenen Kugel: Ladung außen auf Becher.

Abbildung 2.10.5: Ladungsübertragung im Faradayschen Becherversuch.

Versuch 2: geladene Kugel im Becher

Vorgehensweise: Wie in Abb. 2.10.5b dargestellt, wird eine Kugel mit Ladung Q in den Hohlraum des Bechers eingeführt, ohne die Wand zu berühren.

Beobachtungen: Der Becher insgesamt bleibt ungeladen, aber an seiner Innen- bzw. Außenseite werden ungleichnamige Flächenladungen Q_i und Q_a induziert, deren Betrag näherungsweise der Kugelladung entsprechen. Im Außenraum misst man ein nicht verschwindendes elektrisches Feld, das vom Ort der geladenen Kugel im Becherinneren näherungsweise unabhängig ist.

Erklärung: Trägt die Kugel die Ladung $+Q$, so wird an der Innenfläche des Bechers eine Ladung Q_i mit

$$Q_i \approx -Q \quad (2.10.12)$$

influenziert. Dies weist man nach, indem man eine Hüllfläche Σ_1 wählt, die im Inneren des Bechermaterials und durch das Loch verläuft. Vernachlässigt man das Feld im Loch, so verläuft die Hüllfläche überall im feldfreien Raum, sodass die eingeschlossene Gesamtladung $Q + Q_i$ verschwinden muss. Aufgrund der Ladungserhaltung bleibt der Becher insgesamt ungeladen. Somit wird auf seiner Außenseite die Ladung $+Q$ influenziert.

Wählt man eine Hüllfläche Σ_2 außen um den Becher, so schließt diese die Gesamtladung Q ein. Somit gilt für den Hüllfluss

$$\psi(\Sigma_2) = \oint_{\Sigma_2} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \neq 0. \quad (2.10.13)$$

Weil der Fluss im Außenraum nicht verschwindet, können dort auch die Flussdichte und die Feldstärke nicht identisch verschwinden.

Man erkennt, dass eine elektrisch leitfähige Hüllfläche nicht dazu geeignet ist, den Außenraum vom Feld einer in ihr eingeschlossenen Ladung zu schirmen.

Versuch 3: Kugel in Berührung zum Becherinneren

Vorgehensweise: Eine geladene leitfähige Kugel wird in den Becher eingeführt und mit seiner Innenwand in Berührung gebracht; siehe Abb. 2.10.5c. Danach wird die Kugel wie in Abb. 2.10.5d aus dem Becher entfernt.

Beobachtung: Die Kugel entlädt sich, ihre Ladung wandert auf die Außenseite des Bechers, und das Feld im Becherinneren verschwindet. Nach der Entnahme aus dem Becher ist die Kugel ladungsfrei.

Erklärung: Die die Innenfläche des Bechers berührende Kugel bildet mit diesem einen leitfähigen Körper mit einem ladungsfreien Hohlraum. Von dieser Konfiguration ist bereits bekannt, dass nach dem Abklingen von Ausgleichsvorgängen das Innere feldfrei ist, und sich auf der Außenseite des Bechers eine Flächenladung ausbildet. Weil die Kugel ungeladen ist, ihre Oberfläche sowie die Innenfläche des Bechers keine Flächenladungen tragen, und der die Kugel umgebende Hohlraum feldfrei ist, gibt es beim Trennen der Kugel vom Becher keine Ladungen oder Coulomb-Kräfte, die ein Aufladen der Kugel bewirken könnten. Somit bleibt die Kugel ungeladen.

Man erkennt, dass wiederholtes Anwenden der beschriebene Vorgehensweise die Möglichkeit eröffnet, große Ladungsmengen von der Kugel auf den Becher zu übertragen. Berührt man mit der Kugel hingegen die Außenseite des Bechers, so ist die übertragbare Ladungsmenge sehr beschränkt: Nach mehrfachem Wiederholen ist die Flächenladungsdichte auf der Außenseite des Bechers so hoch, dass ihre abstößenden Coulomb-Kräfte das Zufießen weiterer Ladungen von der Kugel verhindern.

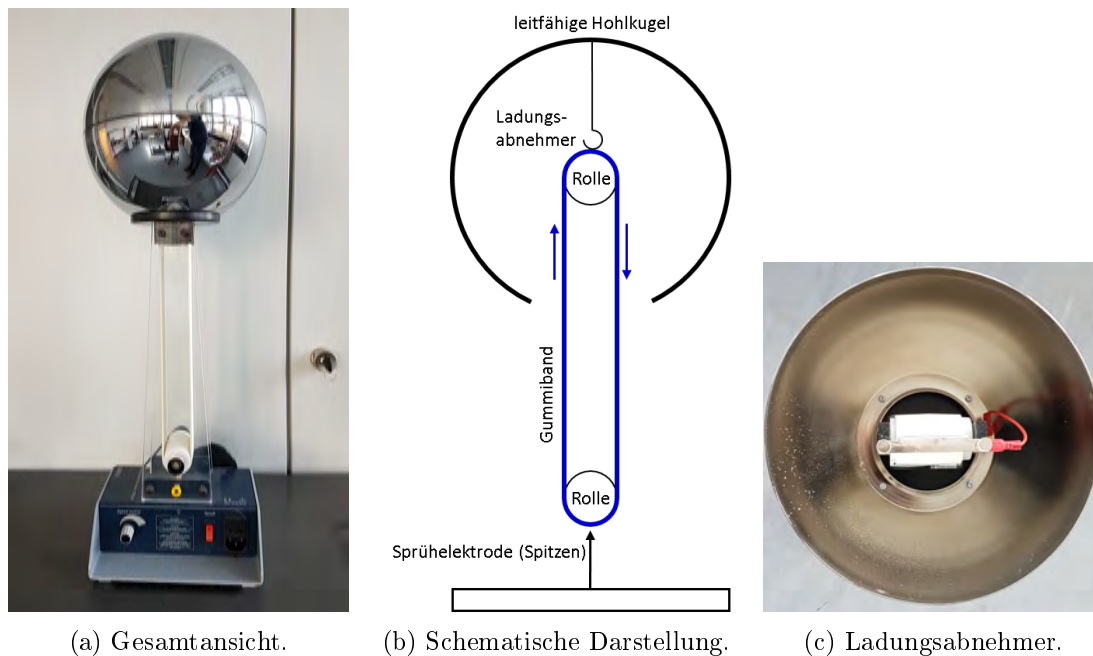


Abbildung 2.10.6: Bandgenerator.

2.10.4 Anwendung: Bandgenerator nach van de Graaff

Der in Abb. 2.10.6a abgebildete van de Graaff-Generator ist eine in Laboratorien häufig benutzte Influenzmaschine zur Erzeugung hoher Gleichspannungen. Abb. 2.10.6b veranschaulicht seine Funktion:

Auf einer leitfähigen Bodenplatte ist ein metallischer Kamm mit scharfen Spitzen angebracht. Er stellt eine Sprühelektrode dar, deren Funktion in der Lehrveranstaltung *Physikalische Grundlagen der Elektronik* (Fermi-Niveau, Austrittsarbeit) näher erklärt werden wird, und überträgt negative Ladungen auf ein Gummiband, das sich zwischen zwei Rollen dreht. Die Ladungen werden in das Innere einer von der Grundplatte isolierten, leitfähigen Hohlkugel befördert und von einem mit der Kugel leitfähig verbundenen Abnehmer abgestreift; siehe Abb. 2.10.6c. Die Hohlkugel bildet einen Faradayschen Becher, sodass die Ladungen auf die Außenfläche wandern und diese immer weiter aufladen. In der Praxis setzen Entladungen durch die Luft (Funkenbildung) und Leckströme durch den Isolator der Aufladung Grenzen.

2.11 Elektrostatische Felder in Nichtleitern

Aus Kapitel 2.1.1 ist bekannt, dass Nichtleiter keine frei beweglichen Ladungsträger aufweisen. Wie die folgenden Versuche zeigen, können sie dennoch großen Einfluss auf das elektrische Feld haben.

2.11.1 Grundlegende Versuche

Tauchversuch: Bringt man auf die Elektroden eines Kondensators im Vakuum oder in Luft die Ladung $\pm Q$ auf, so wirkt diese die Coulomb-Kraft $|\vec{F}_0|$. Taucht man den geladenen Kondensator in eine isolierende Flüssigkeit (z.B. Transformatoröl), so misst man eine verringerte Kraft $|\vec{F}_\varepsilon| < |\vec{F}_0|$, obwohl die ableitbaren Ladungen auf den Elektroden unverändert bleiben. Weiterhin hängt die Kraft vom Material des Isolators ab. Entnimmt man den Kondensator aus der Flüssigkeit, so stellt sich die ursprüngliche Kraft \vec{F}_0 wieder ein.

Einfachplättchenversuch: Bringt man auf die Elektroden eines Parallelplattenkondensators im Vakuum oder in Luft die Ladung $\pm Q$ auf, so misst man an ihm die Spannung U_0 . Führt man ähnlich zum Einfachplättchenversuch aus Unterkapitel 2.10.1 eine isolierende Platte in den Kondensator ein, so misst man eine verringerte Spannung $U_\varepsilon < U_0$, wobei die Spannungsabnahme weniger stark ausgeprägt ist als in Unterkapitel 2.10.1. Weiterhin hängt die Spannung vom Material des Isolators ab.

Doppelplättchenversuch: Führt man ähnlich zu Unterkapitel 2.10.2 zwei sich berührende isolierende Plättchen in einen geladenen Parallelplattenkondensator ein, und trennt man diese im Feld, so misst man nach ihrer Entnahme aus dem Kondensator keine resultierenden Ladungen auf ihnen.

2.11.2 Dipolmoment und elektrische Polarisation

Die Tauch- und Einfachplättchenversuche zeigen, dass die elektrische Feldstärke im nichtleitenden Material geschwächt, aber nicht völlig ausgelöscht wird. Der Doppelplättchenversuch unterstreicht, dass die Feldschwächung im Gegensatz zur Influenz in Leitern nicht durch makroskopische Ladungsverschiebungen verursacht wird: Frei bewegliche Ladungsträger sind in Nichtleitern nicht verfügbar.

Die Ursache für die Feldschwächung liegt darin, dass sich im Nichtleiter mikroskopische Dipole bilden oder in eine Vorzugsrichtung ausrichten. Daher bezeichnet man Nichtleiter auch als *Dielektrika*.

Definition 2.11.1 (Elektrischer Dipol). Ein Paar betragsgleicher, aber gegenpoliger und um einen Vektor \vec{d} gegeneinander versetzter Punktladungen. Dabei weist \vec{d} von der negativen zur positiven Ladung.

Definition 2.11.2 (Elektrisches Dipolmoment \vec{p}). Maß für die Stärke und Richtung eines elektrischen Dipols:

$$\vec{p} = Q\vec{d}, \quad [\vec{p}] = \text{Cm}. \quad (2.11.1)$$

Abb. 2.11.1a unterstreicht, dass das Dipolmoment von der negativen zur positiven Ladung weist. Zur Beschreibung einer Vielzahl mikroskopischer Dipole im Sinne des Kontinuummodells führt man eine räumliche Dipoldichte ein:

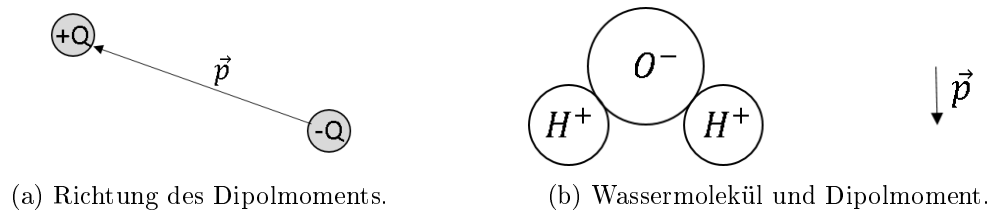


Abbildung 2.11.1: Elektrisches Dipolmoment.

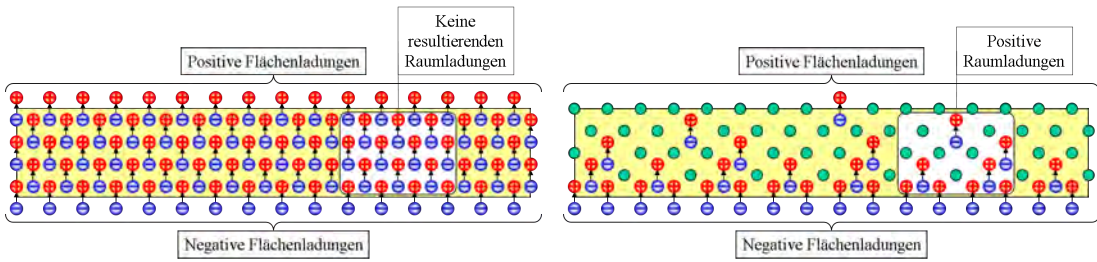
Definition 2.11.3 (Elektrische Polarisierung P). Räumliche Dichte der elektrischen Dipolmomente:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i. \quad (2.11.2)$$

Hierin bezeichnet ΔV ein Volumen um den Punkt \vec{r} , und die Summe erstreckt sich über alle in ΔV enthaltenen Dipolmomente \vec{p}_i .

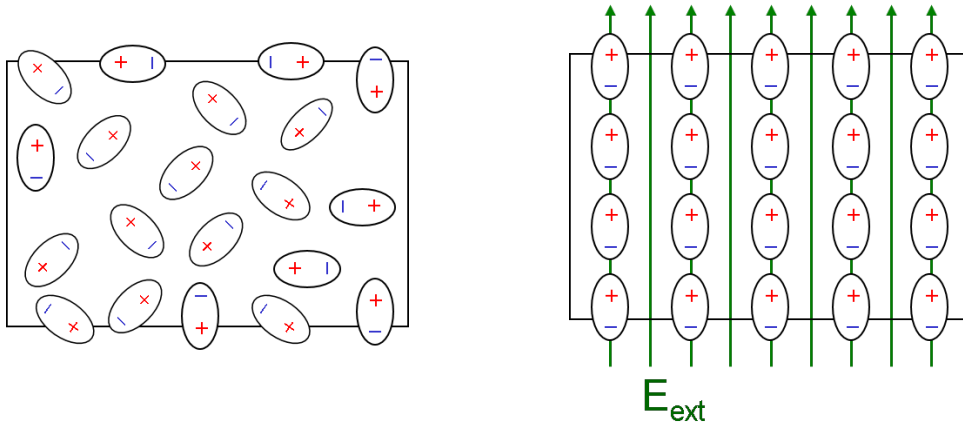
Wichtige Polarisationsmechanismen sind:

- **Orientierungspolarisation:** In polaren Molekülen fallen die Ladungsschwerpunkte der Atomkerne und der Elektronenhülle nicht zusammen. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist flüssiges Wasser H_2O ; siehe Abb. 2.11.1b. In Abwesenheit eines äußeren Feldes und aufgrund der Wärmebewegung sind die Dipole zufällig ausgerichtet. In Anwesenheit eines äußeren Feldes drehen sich die Dipole vorzugsweise in die Feldrichtung ein.
- **Verschiebungspolarisation:** In unpolaren Molekülen oder Atomen fallen die Ladungsschwerpunkte zusammen. In Anwesenheit eines äußeren Feldes verschieben sich die Ladungsschwerpunkte aufgrund der Coulomb-Kraft und bilden einen Dipol aus.
- **Ionenpolarisation:** In Ionengittern verschieben sich in Anwesenheit eines äußeren Feldes die Orte der negativen bzw. positiven Ionen gegeneinander. Hierdurch bilden sie einen Dipol aus.
- **Permanente Polarisierung:** Stoffe, in denen elementare Dipole eine Vorzugsrichtung aufweisen, bilden auch in Abwesenheit eines äußeren Feldes eine makroskopische Polarisierung aus. Sie werden in Anlehnung an (Permanent-)Magnete als *Elektrete* bezeichnet. Anwendungen sind Mikrofone.
- **Piezoelektrizität:** Stoffe wie Siliziumdioxid SiO_2 bilden unter gerichteter mechanischer Verformung eine Polarisierung aus. Man nennt dies den piezoelektrischen Effekt. Dieser ist umkehrbar (inverser piezoelektrischer Effekt): Anlegen einer Spannung führt an einem piezoelektrischen Material zu mechanischer Verformung. Anwendungen sind Zünder, Schwingquarze, Aktoren und Sensoren.



(a) Homogene Polarisation: flächenartige Ladungsverteilung. (b) Inhomogene Polarisation: flächenartige und räumliche Ladungsverteilungen.

Abbildung 2.11.2: Polarisationsladungen.



(a) Polare Moleküle ohne äußeres Feld. (b) Polare Moleküle im äußeren Feld.

Abbildung 2.11.3: Schwächung der Feldstärke durch Orientierungspolarisation.

Abb. 2.11.2 veranschaulicht, dass elektrische Polarisation zu flächenartigen und/oder räumlichen Ladungsverteilungen führt. Diese *Polarisationsladungen* Q_p sind an die mikroskopischen Bausteine der Materie gebunden und lassen sich daher makroskopisch nicht ableiten.

Mit feldtheoretischen Methoden lässt sich zeigen, dass die negative Polarisation $-\vec{P}$ die zur Polarisation Q_p gehörende Flussdichte ist. Es ist bereits bekannt, dass $\epsilon_0 \vec{E}$ die Flussdichte für die Gesamtheit aller Ladungen ist. Weiterhin haben wir \vec{D} als die Flussdichte für die ableitbaren Ladungen eingeführt. Somit gilt

$$\epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P}, \tag{2.11.3}$$

was die beobachtete Schwächung der Feldstärke mathematisch beschreibt. Diesen Effekt veranschaulicht Abb. 2.11.3 für den Fall der Orientierungspolarisation.

2.11.3 Suszeptibilität und relative Permittivität

In vielen Materialien ändert sich die Polarisierung über weite Bereiche linear mit der Feldstärke. Der Proportionalitätsfaktor heißt *elektrische Suszeptibilität* χ_e des Materials:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (2.11.4)$$

Falls Polarisierung und Feldstärke nicht in dieselbe Richtung weisen, wird die Suszeptibilität ein Tensor zweiter Stufe, der durch eine Matrix darstellbar ist. Auf diesen Fall wird nicht weiter eingegangen. Einsetzen von (2.11.4) in (2.11.3) ergibt

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}. \quad (2.11.5)$$

Definition 2.11.4 (Relative elektrische Permittivität ε_r). Materialabhängiger Proportionalitätsfaktor zwischen $\varepsilon \vec{E}$ und \vec{D} :

$$\varepsilon_r := 1 + \chi_e, \quad (2.11.6)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}. \quad (2.11.7)$$

Definition 2.11.5 (Elektrische Permittivität ε). Materialabhängiger Proportionalitätsfaktor zwischen \vec{E} und \vec{D} :

$$\varepsilon := \varepsilon_0 \varepsilon_r. \quad (2.11.8)$$

Beziehungen der Form (2.11.8) und (2.11.6) werden als Materialgesetze oder Konstitutivgleichungen bezeichnet.

Beispiel 2.11.1 (Temperaturabhängigkeit der Permittivität). Destilliertes Wasser besteht aus polaren Molekülen. In der flüssigen Phase tritt Orientierungspolarisation mit $\varepsilon_r \approx 81$ bei 18°C auf. Beim Gefrieren wird die Beweglichkeit der Moleküle erheblich eingeschränkt, sodass für Eis $\varepsilon_r \approx 16$ bei -16°C gilt.

Beispiel 2.11.2 (Mikrowellenofen). Werden polare Moleküle einem elektrischen Wechselfeld ausgesetzt, so ändern diese ihre Orientierung mit der Frequenz des Feldes. Dies führt zu frequenzproportionalen Reibungsverlusten, die im Mikrowellenofen ($f \approx 2.45$ GHz) zur Erhitzung von Kochgut ausgenutzt werden. Man spricht von Polarisationsverlusten. Erhöht man die Frequenz, so können die Moleküle ab einem gewissen Punkt dem Feld aufgrund ihrer Massenträgheit nicht mehr folgen, die Orientierungspolarisation kommt zum Erliegen, und die relative Permittivität des Materials nimmt stark ab.

Kochgeschirr für Mikrowellenherde fertigt man aus unpolaren Nichtleitern, weil für diese die Polarisationsverluste bei Mikrowellenfrequenzen gering sind.

Aufgabe 2.11.1. Es seien Ω ein Gebiet und $Q_p(\Omega)$ die darin enthaltene Polarisationsladung. Zeigen Sie für den Hüllfluss der Polarisierung, dass

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{P} \cdot d\vec{\Gamma} = -Q_p(\Omega). \quad (2.11.9)$$

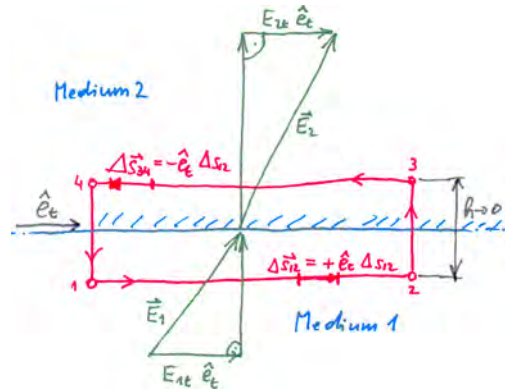


Abbildung 2.11.4: Doppelschichtfreie Grenzfläche zweier Medien: Die Umlaufspannung verschwindet.

2.11.4 Grenzflächen zwischen zwei Medien

Wir betrachten eine glatte Grenzfläche zweier Medien, die im Weiteren durch die Indices $(\cdot)_1$ und $(\cdot)_2$ bezeichnet werden.

Grenzflächenbedingung für die elektrische Feldstärke

Aus Unterkapitel 2.6.3 ist bekannt, dass die Zirkulation der elektrischen Feldstärke, das ist die Umlaufspannung, längs jeden geschlossenen Weges verschwindet. Somit gilt gemäß (2.6.18) für den in Abb. 2.11.4 gezeigten rechteckigen Umlauf, bei dem sich die Punkte P_1 und P_2 im Medium 1 und die Punkte P_3 und P_4 im Medium 2 befinden,

$$\dot{U} = U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{41} \stackrel{(2.6.18)}{=} 0. \quad (2.11.10)$$

Lässt man die Höhe h so gegen Null gehen, dass sich die Wege $\Delta \vec{s}_{12}$ und $\Delta \vec{s}_{34}$ von entgegengesetzten Seiten der Grenzfläche her aneinander schmiegen, so verlaufen diese tangential zur Grenzfläche, und die Längen der Wege $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ streben gegen Null. Unter der Voraussetzung, dass die Grenzfläche keine Dipolschicht trägt, verschwinden die Spannungen U_{23} und U_{41} :

$$U_{23} \rightarrow 0, \quad U_{41} \rightarrow 0, \quad \text{für } h \rightarrow 0. \quad (2.11.11)$$

Schreibt man \hat{e}_t für den tangentialen Einheitsvektor in Richtung $\Delta \vec{s}_{12}$, so gilt

$$\Delta \vec{s}_{12} = +\hat{e}_t \Delta s_{12}, \quad (2.11.12)$$

$$\Delta \vec{s}_{34} = -\hat{e}_t \Delta s_{12}. \quad (2.11.13)$$

Wählt man den Weg Δs_{12} so kurz, dass die Feldstärke als konstant angenommen werden darf, so folgt unter Verwendung von $(\cdot)_t$ für Tangentialkomponenten

$$U_{12} \rightarrow \vec{E}_1 \cdot (+\hat{e}_t) \Delta s_{12} \rightarrow +E_{1t} \Delta s_{12}, \quad (2.11.14a)$$

$$U_{34} \rightarrow \vec{E}_2 \cdot (-\hat{e}_t) \Delta s_{12} \rightarrow -E_{2t} \Delta s_{12}. \quad (2.11.14b)$$

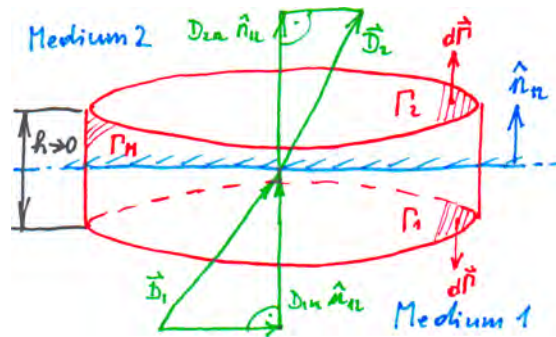


Abbildung 2.11.5: Flächenladungsfreie Grenzfläche: Der Hüllfluss verschwindet.

Einsetzen von (2.11.11) und (2.11.14) in (2.11.10) führt auf

$$E_{1t} \Delta s_{12} - E_{2t} \Delta s_{12} = 0, \quad (2.11.15)$$

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (2.11.16)$$

- Die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke sind stetig.

Weil im Inneren eines leitfähigen Körpers das Feld Null ist, und seine Oberfläche keine Dipolschicht trägt, verschwinden an der Grenzfläche die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke.

Grenzflächenbedingung für die elektrische Flussdichte

Aus Unterkapitel 2.8.3 ist bekannt, dass der elektrische Hüllfluss $\dot{\psi}(\partial\Omega)$ der eingeschlossenen Ladung $Q(\Omega)$ entspricht. Legt man wie in Abb. 2.11.5 um die Grenzfläche einen Zylinder Ω mit Grundfläche Γ_1 , Mantelfläche Γ_M und Deckfläche Γ_2 , dessen Achse in Richtung der Flächennormale \hat{n}_{12} weist, so gilt allgemein

$$\dot{\psi}(\partial\Omega) = \psi(\Gamma_1) + \psi(\Gamma_2) + \psi(\Gamma_M) = Q(\Omega). \quad (2.11.17)$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Flächennormalen aus dem Zylinder zeigen. Lässt man die Zylinderhöhe h so gegen Null streben, dass sich Γ_1 und Γ_2 von entgegengesetzten Seiten an die Grenzfläche schmiegen, so verschwinden der Fluss durch den Mantel $\psi(\Gamma_M)$ und – in Abwesenheit von Flächenladungen – die im Zylinder eingeschlossene Ladung:

$$\dot{\psi} \rightarrow \psi(\Gamma_1) + \psi(\Gamma_2) \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0, \quad (2.11.18)$$

$$\int_{\Gamma_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{\Gamma} + \int_{\Gamma_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{\Gamma} \rightarrow 0. \quad (2.11.19)$$

Weil die Flächen nach außen weisen, gilt

$$d\vec{\Gamma} = -\hat{n}_{12} d\Gamma \quad \text{auf } \Gamma_1, \quad (2.11.20)$$

$$d\vec{\Gamma} = +\hat{n}_{12} d\Gamma \quad \text{auf } \Gamma_2. \quad (2.11.21)$$

Wählt man den Zylinderquerschnitt so klein, dass die Flussdichte auf der Grund- und Deckfläche jeweils als konstant angesehen werden darf, so folgt mit der Be-

zeichnung D_n für die Normalkomponente in Richtung \hat{n}_{12} die Beziehung

$$-\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_{12} + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_{12} = 0, \quad (2.11.22)$$

$$D_{2n} = D_{1n}. \quad (2.11.23)$$

- An der Grenzfläche sind in Abwesenheit von Flächenladungen die Normalkomponenten der Flussdichte stetig.

2.12 Energie des elektrostatischen Feldes

2.12.1 Energie eines Kondensators

Aus (2.6.13) ist bekannt, dass das elektrische Feld an einem Teilchen der Ladung Q längs eines Weges L die Arbeit $W(L) = QU(L)$ erbringt, wobei $U(L)$ die Spannung längs L bezeichnet. Dies bedeutet auch, dass die mechanische Arbeit QU verrichtet werden muss, um eine Ladung Q entgegen der Feldstärke zu bewegen.

Um die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Energie (= Arbeitsvermögen) zu berechnen, geht man von ungeladenen Elektroden aus und bringt sukzessive Ladungsinkremente von der einen Elektrode gegen die Coulomb-Kraft zur anderen. Dabei ist zu beachten, dass während des Ladevorgangs die Ladungen und die Spannung nicht konstant bleiben.

Betrachtet man jedoch eine infinitesimal kleine Ladung dq , so ist die durch sie verursachte Spannungserhöhung vernachlässigbar. Bezeichnet man die zum betrachteten Ladezustand gehörenden Größen mit Kleinbuchstaben, so gilt

$$dw = u dq = \frac{1}{C} q dq. \quad (2.12.1)$$

Im Weiteren wird die Kapazität C als ladungsunabhängig vorausgesetzt. Summiert man über alle Ladungsinkremente bis zum Erreichen der Gesamtladung Q , so folgt für die erbrachte Arbeit W die Beziehung

$$W = \int_0^W dw = \int_0^Q \frac{1}{C} q dq = \frac{1}{C} \left[\frac{1}{2} q^2 \right]_0^Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (2.12.2)$$

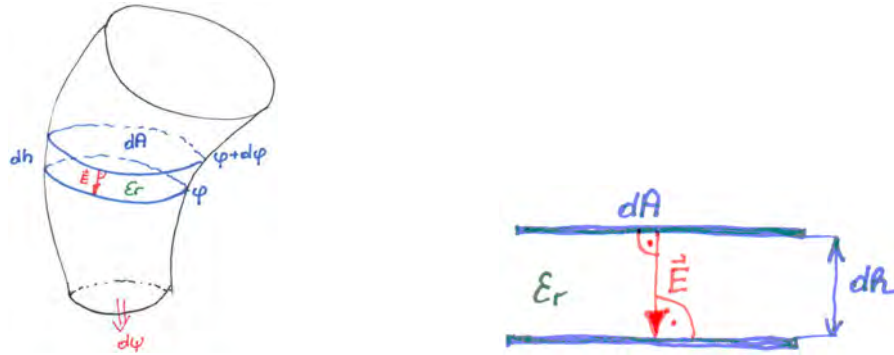
Die in der Kapazität gespeicherte elektrische Energie \mathcal{E}_e beträgt somit

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \stackrel{(2.9.1)}{=} \frac{1}{2} C U^2 \stackrel{(2.9.1)}{=} \frac{1}{2} Q U. \quad (2.12.3)$$

Definition 2.12.1 (Momentanleistung $P(t)$). Die zeitliche Änderung der Energie $\mathcal{E}(t)$:

$$P(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t). \quad (2.12.4)$$

Weil in realen Systemen die Leistung beschränkt ist, zeigt (2.12.3), dass der Zeitverlauf der Spannung an einer Kapazität keine Sprünge aufweisen kann.



(a) Durch benachbarte Äquipotentialflächen begrenztes Gebiet einer Flussröhre. (b) Dem Gebiet äquivalenter Parallelplattenkondensator.

Abbildung 2.12.1: Zur Berechnung der elektrischen Energie.

2.12.2 Energiedichte und Feldenergie

Zerlegt man wie in Abb. 2.12.1a ein Feldgebiet in Flussröhren vom Fluss $d\psi$, und schneidet man aus einer Flussröhre das Gebiet zwischen zwei benachbarte Äquipotentialflächen mit Potentialdifferenz $d\varphi$, so erhält man den in Abb. 2.12.1b dargestellten infinitesimalen Parallelplattenkondensator mit Plattenfläche dA und Höhe dh . Beachtet man, dass die Feldgrößen homogen sind und der Flächennormalvektor in Richtung der Feldstärke weist, so erhält man für die integralen Kenngrößen dQ_2 und dU_{21} die Beziehungen

$$dQ_2 = \vec{D} \cdot \hat{e}_{\vec{E}} dA, \quad (2.12.5)$$

$$dU_{21} = |\vec{E}| dh. \quad (2.12.6)$$

Für das vom Plattenkondensator eingenommene Volumenelement dV und die in ihm gespeicherte Energie $d\mathcal{E}_e$ folgen

$$dV = dA dh, \quad (2.12.7)$$

$$d\mathcal{E}_e \stackrel{(2.12.3)}{=} \frac{1}{2} Q_2 U_{21} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \hat{e}_{\vec{E}} |\vec{E}| dA dh = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} dV. \quad (2.12.8)$$

Definition 2.12.2 (Elektrische Energiedichte w_e). Auf das Volumen bezogene elektrische Energie:

$$w_e(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{E}_e}{\Delta V} = \left. \frac{d\mathcal{E}_e}{dV} \right|_{\vec{r}}. \quad (2.12.9)$$

Hierin bezeichnet ΔV ein Volumenelement um den Punkt \vec{r} und $\Delta \mathcal{E}_e$ die darin gespeicherte elektrische Energie.

Eq. (2.12.8) liefert für die Energiedichte unmittelbar

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}. \quad (2.12.10)$$

Mit feldtheoretischen Methoden kann man zeigen, dass (2.12.10) auch in Anwesenheit räumlicher und/oder flächenhafter Ladungsverteilungen gültig bleibt. Die in einem Volumenelement bzw. im gesamten Feldgebiet Ω gespeicherten Energien lauten demnach

$$d\mathcal{E}_e = w_e dV = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} dV, \quad (2.12.11)$$

$$\mathcal{E}_e = \int d\mathcal{E} = \int_{\Omega} w_e dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{D} \cdot \vec{E} dV. \quad (2.12.12)$$

Gilt ein Materialgesetz der Form (2.11.8), so vereinfachen sich (2.12.10) und (2.12.12) zu

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon |\vec{E}|^2, \quad (2.12.13)$$

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon |\vec{E}|^2 dV. \quad (2.12.14)$$

Man beachte, dass die das Feld hervorrufenden Ladungen nirgendwo vorkommen! Es sei angemerkt, dass es eine andere Darstellung der Energie gibt, die auf den Ladungen und dem Potenzial am Ort der Ladungen beruht.

2.12.3 Kraftberechnung durch virtuelle Verschiebung

Beim Verschieben eines Elements eines elektrostatischen Systems um ein infinitesimales Wegelement $d\vec{l} = \hat{e}_l dl$ leistet die Komponente $F_l = \vec{F}_C \cdot \hat{e}_l$ der Coulomb-Kraft \vec{F}_C eine mechanische Arbeit dW_m der Größe

$$dW_m = \vec{F}_C \cdot d\vec{l} = \vec{F}_C \cdot \hat{e}_l dl = F_l dl; \quad (2.12.15)$$

siehe auch Unterkapitel 2.6.2. Somit ermöglicht das Aufstellen der Energiebilanz die Ermittlung der Kraftkomponente F_s . Benötigt man alle Kraftkomponenten in kartesischen Koordinaten, so wählt man für die Verschiebungen $d\vec{s} \in \{d\vec{x}, d\vec{y}, d\vec{z}\}$.

Die folgenden Beispiele veranschaulichen diese als *Methode der virtuellen Verschiebung* bezeichnete Vorgehensweise.

Kraft auf Kondensatorplatte

Gegeben ist ein Parallelplattenkondensator mit Plattenfläche A , dessen Elektroden P_+ und P_- sich bei $z_+ = 0$ m und $z_- = h$ befinden. Zur Berechnung der z -Komponente F_z der Coulomb-Kraft auf P_- wird ihre Position auf $z(P_-) = h + dz$ verschoben. Für die Abhängigkeit der Kapazität von $z(P_-)$ gilt

$$C(z) = \varepsilon \frac{A}{z}, \quad (2.12.16)$$

$$\frac{dC}{dz}(z) = -\varepsilon \frac{A}{z^2} = -\frac{C(z)}{z}. \quad (2.12.17)$$

Beispiel 2.12.1 (Konstante Ladung). Trennt man den Kondensator von der Spannungsquelle wie in Abb. 2.10.2b, so bleiben die Plattenladungen $\pm Q$ konstant.

Weil danach keine Leistung über die Leitungen zu- oder abfließen kann, entspricht die bei der virtuellen Verschiebung geleistete mechanische Arbeit der Abnahme der gespeicherten elektrischen Energie \mathcal{E}_e :

$$dW_m = F_z dz = -d\mathcal{E}_e, \quad (2.12.18)$$

$$F_z = -\left. \frac{d\mathcal{E}_e}{dz} \right|_{z=h}. \quad (2.12.19)$$

Einsetzen von (2.12.3) mit der Nebenbedingung konstanter Ladung führt auf

$$F_z(z=h) = -\left. \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(z)} \right] \right|_{z=h} = \left[\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dz} \right]_{z=h} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(h)} \frac{1}{h}, \quad (2.12.20)$$

was dem Ergebnis (2.10.4) entspricht. Die Kraft ist so gerichtet, dass sich die elektrische Energie verringert, bzw. die Kapazität sich vergrößert.

Beispiel 2.12.2 (Konstante Spannung). Belässt man den Kondensator an der Spannungsquelle wie in Fig. 2.10.1a, so bleibt die Spannung zwischen seinen Platten konstant. In diesem Fall ist zu berücksichtigen, dass die Anordnung während der der virtuellen Verschiebung Energieaustausch mit der Spannungsquelle ermöglicht: Vergrößert sich die Kapazität, so fließt die Ladung Q von der Spannungsquelle auf die Kondensatorplatten. Sie führt zu einem Zuwachs an elektrischer Energie E_q gemäß (2.12.1) mit

$$d\mathcal{E}_q = UdQ. \quad (2.12.21)$$

Somit lautet die Energiebilanz für die virtuelle Verschiebung

$$d\mathcal{E}_e = d\mathcal{E}_q - dW_m, \quad (2.12.22)$$

$$d\left(\frac{1}{2}CU^2\right) = UdQ - F_z dz = Ud(CU) - F_z dz. \quad (2.12.23)$$

Unter der Bedingung konstanter Spannung folgt

$$\frac{1}{2}U^2 dC = U^2 dC - F_z dz, \quad (2.12.24)$$

$$F_z dz = \frac{1}{2}U^2 dC, \quad (2.12.25)$$

$$F_z(z=h) = \left. \frac{1}{2}U^2 \frac{dC}{dz} \right|_{z=h} = -\frac{1}{2}U^2 C(h) \frac{1}{h}. \quad (2.12.26)$$

Wie zu erwarten, führen die Zugänge über die Coulomb-Kraft sowie die virtuelle Verschiebung bei konstanter Ladung oder Spannung zur selben Kraft.

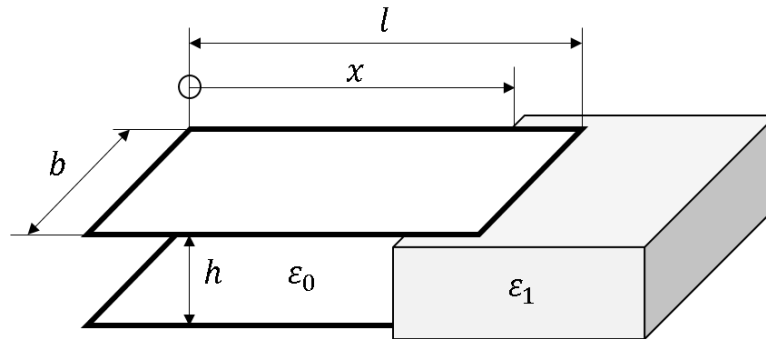


Abbildung 2.12.2: Parallelplattenkondensator mit dielektrischem Block.

Beispiel 2.12.3 (Kraft auf Dielektrikum im Parallelplattenkondensator). Der in Abb. 2.12.2 dargestellte Parallelplattenkondensator mit Plattenfläche $l \times b$ und -abstand h ist zum einen Teil mit Luft und zum anderen Teil mit einem dielektrischen Block der elektrischen Permittivität $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ gefüllt. Gesucht wird die x -Komponente der Kraft auf das Dielektrikum.

Bezeichnet man die Länge des Luftbereichs mit x , so ergibt sich die Kapazität C unter Vernachlässigung von Randstörungen als Parallelschaltung zweier Kondensatoren mit jeweils homogenem Dielektrikum zu

$$C(x) = \varepsilon_0 \frac{xb}{h} + \varepsilon_1 \frac{(l-x)b}{h} = \frac{b}{h} [\varepsilon_0 x + \varepsilon_1 (l-x)]. \quad (2.12.27)$$

Wählt man der Einfachheit halber den Zugang konstanter Plattenladung, dann lautet die Energiebilanz

$$dW_m = -d\mathcal{E}_e, \quad (2.12.28)$$

$$F_x dx = -d \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) = -\frac{1}{2} Q^2 dC^{-1} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} dC. \quad (2.12.29)$$

Auflösen nach der Kraftkomponente F_x liefert

$$F_x = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{b}{h} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0). \quad (2.12.30)$$

Wieder ist die Kraft so gerichtet, dass sich die elektrische Feldenergie verringert, bzw. dass sich die Kapazität vergrößert.

2.13 Spiegelungsprinzip

Für Strukturen hoher Symmetrie (eben, zylindrisch, kugelsymmetrisch) lässt sich durch geschickte Wahl des Koordinatensystems oftmals erreichen, dass die Felder nur von einer einzigen Koordinate abhängen, was die Lösung des Feldproblems erheblich erleichtert. Das Spiegelungsprinzip nutzt das Vorhandensein von Symmetrieebenen, um eine größere Problemklasse auf diese leichter zu behandelnden Strukturen zurückzuführen. Man unterscheidet zwei Fälle:

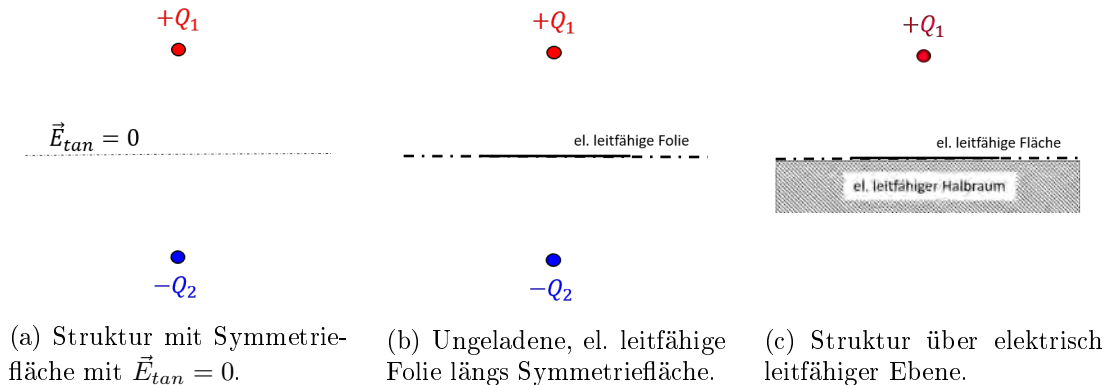


Abbildung 2.13.1: Spiegelung an elektrisch leitfähiger Ebene.

2.13.1 Spiegelung an elektrisch leitfähiger Ebene ($\vec{E}_{tan} = 0$)

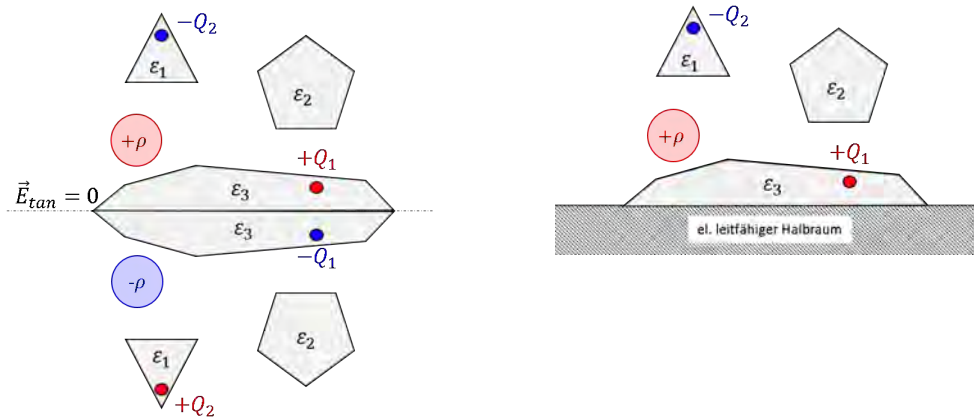
Abb. 2.13.1c zeigt zwei gegengleich geladene Kugeln im freien Raum. Weil Materialien und Ladungsverteilung symmetrisch sind, verschwindet die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke auf der Mittelebene; siehe auch Abb. 2.4.2 und Abb. 2.4.3. Daher bildet die Symmetrieffläche eine Äquipotenzialfläche. Gemäß Kapitel 2.7.1 bleibt die Feldverteilung unverändert, wenn eine Äquipotenzialfläche durch eine dünne, ungeladene, elektrisch leitfähige Folie ersetzt wird, wie in Abb. 2.13.2b dargestellt. Diese trennt die Anordnung in zwei unabhängige Feldprobleme (Ladung über/unter leitender Ebene). Die Feldverteilung im oberen Halbraum bleibt unverändert, wenn der untere Halbraum durch einen elektrisch leitfähigen Körper ersetzt wird.

In der Praxis ist die Umkehrung von großer Bedeutung: Ausgangspunkt ist eine Ladungsanordnung über einer elektrisch leitfähigen Ebene wie in Abb. 2.13.1c. Durch Spiegelung an dieser Ebene erhält man die Anordnung aus Abb. 2.13.2a mit einer Symmetrieebene, auf der die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke \vec{E}_{tan} verschwinden. Die Konstruktion zeigt, dass für die Spiegelladungen die umgekehrte Polarität der ursprünglichen Ladungen zu wählen ist.

Die Spiegelungsmethode ist zielführend, wenn die resultierende Anordnung einfacher zu behandeln ist als das Ausgangsproblem. Sie ist auf allgemeine Ladungsverteilungen und auch in Anwesenheit leitfähiger Körper und Dielektrika anwendbar; siehe Abb. 2.13.2. Häufige Anwendungen sind Anordnungen über der (flachen) Erde oder über großen Metallplatten.

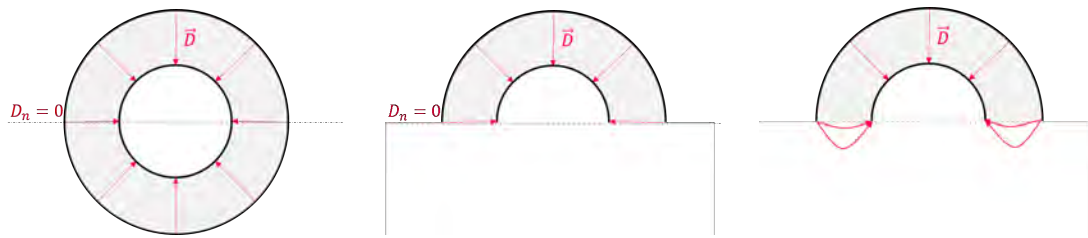
2.13.2 Spiegelung an flussfreier Fläche ($\vec{D}_n = 0$)

Eine zweite Art von Symmetrieffläche ist dadurch ausgezeichnet, dass an ihr die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte verschwindet. Somit verschwindet auch der Fluss durch die Symmetrieffläche. Ein Beispiel hierfür ist eine beliebige Mittelebene des Zylinderkondensators in Abb. 2.13.3a. Abb. 2.13.3b zeigt das



(a) Symmetrieffläche mit $\vec{E}_{tan} = 0$. (b) Struktur über elekt. leitendem Halbraum].

Abbildung 2.13.2: Spiegelung an elektrisch leitfähiger Ebene: allgemeiner Fall.



(a) Struktur mit Fluss-Symmetrieffläche $D_n = 0$. (b) Halbe Struktur mit Randbedingung $D_n = 0$. (c) Realer Kondensator mit Strefelfern.

Abbildung 2.13.3: Spiegelung an flussfreier Ebene mit $D_n = 0$.

Feldbild oberhalb der Symmetrieebene, an der die Randbedingung $D_n = 0$ gilt. Mann kann zeigen, dass diese einer ideal magnetisch leitfähiger Fläche entspricht.

In der Praxis stellt Abb. 2.13.3b ein Modell für den realen Kondensator aus Abb. 2.13.3c unter Vernachlässigung von Strefelfern bzw. Randstörungen dar.

Kapitel 3

Das elektrische Strömungsfeld

3.1 Klassifizierung von Zeitfunktionen

Eine Art der Klassifizierung ist mit Bezug auf die Definitions- und Wertebereiche:

Definition 3.1.1 (Zeitkontinuierliche Funktion). Eine Funktion $f(t)$ heißt zeitkontinuierlich, wenn sie auf einem zusammenhängenden Zeitintervall definiert ist.

Daher enthält jede beliebige Umgebung eines Elements des Definitionsbereichs ein weiteres Element. Die Elemente liegen kontinuierlich (= zusammenhängend).

Definition 3.1.2 (Zeitdiskrete Funktion). Eine Funktion $f(t)$ heißt zeitdiskret, wenn ihr Definitionsbereich eine diskrete Teilmenge der reellen Zahlen ist.

Daher gibt es um jedes Element des Definitionsbereichs eine Umgebung, die kein weiteres Element enthält. Die Elemente des Definitionsbereichs liegen diskret (= abgesondert, getrennt). Der Definitionsbereich ist eine endliche oder abzählbar unendliche Menge, sodass die Funktion als Folge darstellbar ist.

Definition 3.1.3 (Wertkontinuierliche Zeitfunktion). Eine Funktion $f(t)$ ist wertkontinuierlich, wenn ihr Wertebereich eine zusammenhängende Teilmenge der reellen oder komplexen Zahlen ist.

Definition 3.1.4 (Wertdiskrete Zeitfunktion). Eine Funktion $f(t)$ ist wertdiskret, wenn ihr Wertebereich eine diskrete Teilmenge der reellen oder komplexen Zahlen ist.

Eine andere Art der Klassifizierung betrifft die Vorhersagbarkeit der Funktionswerte:

Definition 3.1.5 (Deterministische Zeitfunktion). Eine Funktion $f(t)$ mit vorhersagbarem Verlauf.

Im deterministischen Fall unterscheidet man periodische und nicht-periodische Zeitverläufe.

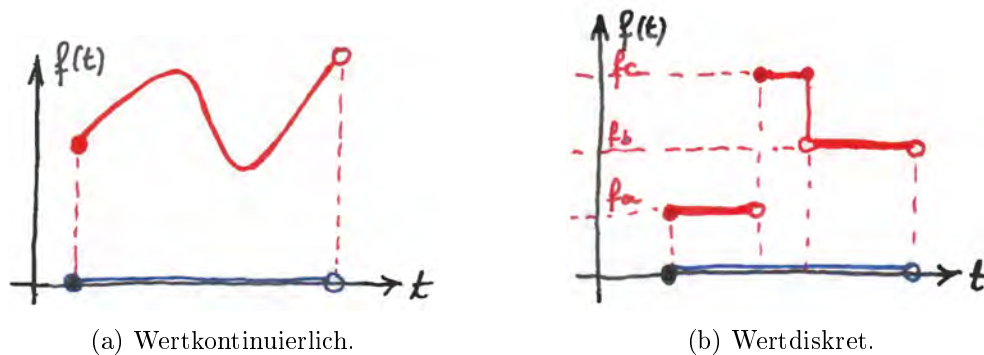


Abbildung 3.1.1: Zeitkontinuierliche Funktionen.

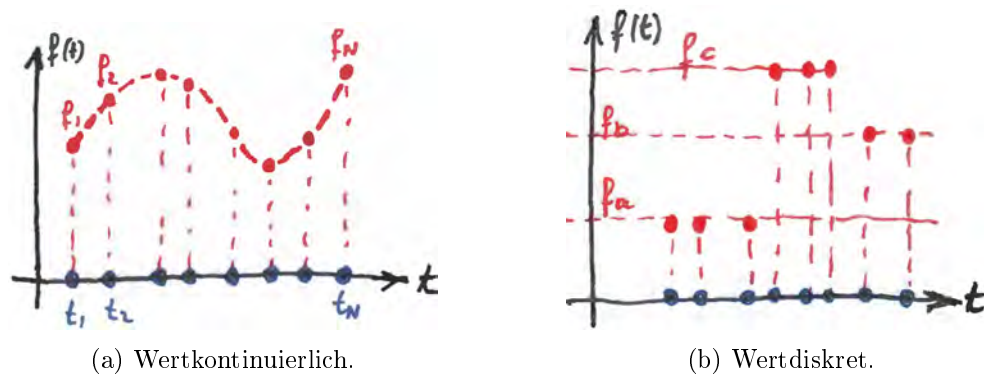


Abbildung 3.1.2: Zeitdiskrete Funktionen.

Definition 3.1.6 (Periodische Zeitfunktion und Periodendauer). Eine Funktion $f(t)$, deren Werte sich in regelmäßigen Zeitabständen wiederholt. Die Periodendauer T bezeichnet den kleinsten Abstand zweier Wiederholungen. Damit gilt

$$f(t) = f(t - nT) \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.1)$$

Definition 3.1.7 (Gleichwert \bar{f}). Der algebraische Mittelwert einer periodischen Zeitfunktion:

$$\bar{f} := \frac{1}{T} \int_T f(t) dt. \quad (3.1.2)$$

Die Verallgemeinerung auf nicht-periodische Funktionen erfolgt, indem man die Periodendauer gegen Unendlich streben lässt:

$$\bar{f} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T f(t) dt. \quad (3.1.3)$$

Definition 3.1.8 (Wechselgröße). Eine periodische Zeitfunktion mit verschwindendem Gleichwert;

$$f : \quad \bar{f} = 0. \quad (3.1.4)$$

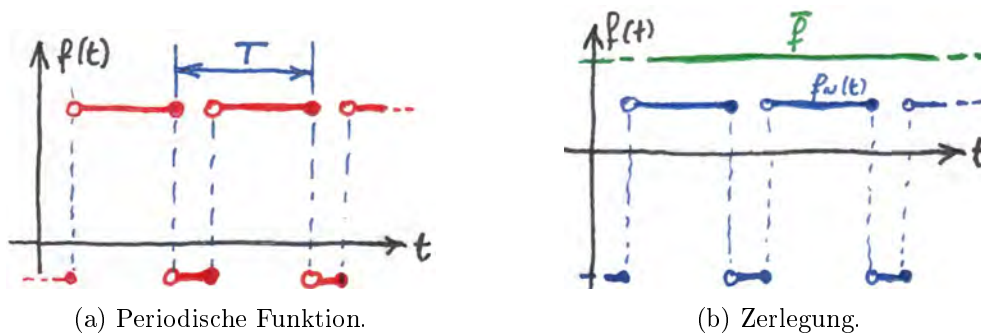


Abbildung 3.1.3: Periodische Funktion mit Periodendauer T und ihre Zerlegung in Gleichwert \bar{f} und eine Wechselgröße $\tilde{f}(t)$.

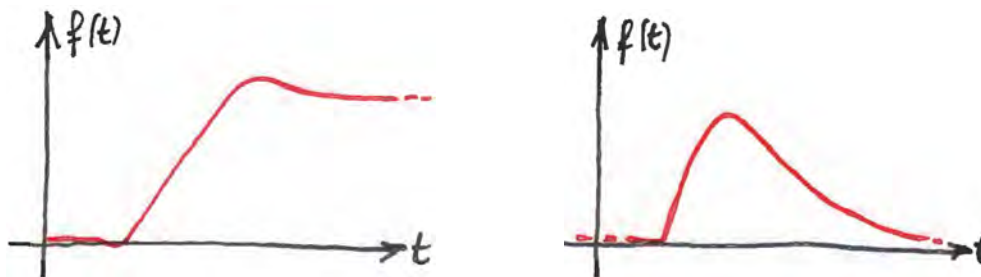


Abbildung 3.1.4: Beispiele nichtperiodischer Zeitfunktionen.

Somit lässt sich jede periodische Zeitfunktion eindeutig in eine Gleich- und eine Wechselgröße zerlegen. Ein Beispiel einer periodischen Funktion gibt Abb. 3.1.3a; ihre Zerlegung ist in Abb. 3.1.3b skizziert. Beispiele nicht-periodischer Funktionen sind in Abb. 3.1.4 zu sehen. Gleichgrößen sind naturgemäß zeitunabhängig und werden in der elektrotechnischen Literatur häufig mit Großbuchstaben abgekürzt. Für zeitabhängige Größen verwendet man oft Kleinbuchstaben.

3.2 Der elektrische Strom

3.2.1 Strom und Ladungstransport

Definition 3.2.1 (Elektrischer Strom I, i). Der elektrische Strom $i(t)$ ist eine skalarwertige Größe und beschreibt den elektrischen Ladungsfluss durch eine orientierte Fläche bezogen auf die Zeit. Weil dieser zeitlich veränderlich sein kann, definiert man ihn über den Ladungsfluss dQ während eines infinitesimalen Zeitinkrements dt :

$$i(t) : \quad dQ = idt. \quad (3.2.1)$$

Der elektrische Strom wird in Ampere (A) gemessen,

$$[i] = A. \quad (3.2.2)$$

Aus (3.2.1) folgt der Ladungsfluss Q während eines Zeitintervalls $[t_1, t_2]$ als

$$Q = \int_Q dQ = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt. \quad (3.2.3)$$

3.2.2 Bezugssinn und Zählfeile

Die Orientierung der stromdurchflossenen Fläche darf frei gewählt werden. Sie bestimmt die Richtung der Flächennormale und gibt einen *Bezugssinn* für den elektrischen Strom vor. Dieser wird durch einen *Zählpfeil* gekennzeichnet. Wird positive Ladung in Richtung des Zählpfeils bzw. der Flächennormale transportiert, so ergibt sich der Wert des Stroms als positiv, andernfalls als negativ.

Die durchströmte Fläche kann auch linienhaft (Querschnitt eines dünnen Blechs) oder punktiert (Querschnitt eines dünnen Drahts) ausgeprägt sein.

3.2.3 Räumliche elektrische Stromdichte

Definition 3.2.2 (Räumliche Stromdichte \vec{J}). Die zum elektrische Strom gehörende räumliche Flussdichte. Weil diese in der Regel ortsabhängig ist, definiert man sie über das durch ein infinitesimales Flächenelement $d\Gamma$ mit Flächennormalvektor \hat{n} fließende Stromelement di :

$$\vec{J}(\vec{r}) : \quad di = \vec{J} \cdot \hat{n} d\Gamma = \vec{J} \cdot d\vec{\Gamma}. \quad (3.2.4)$$

In der deutschsprachigen Literatur ist auch das Formelzeichen \vec{S} gebräuchlich. Für die Einheit der räumlichen Stromdichte ergibt sich

$$[\vec{J}] = \text{A/m}^2. \quad (3.2.5)$$

Die im Zeitinkrement dt transportierte Ladung Q beträgt somit

$$dQ = di dt = \vec{J} \cdot \hat{n} d\Gamma dt = \vec{J} \cdot d\vec{\Gamma} dt. \quad (3.2.6)$$

Aus (3.2.4) folgt der Gesamtstrom $i(t)$ durch die orientierte Fläche Γ als

$$i(t) = \int_i di = \int_{\Gamma(t)} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} d\Gamma = \int_{\Gamma(t)} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{\Gamma}. \quad (3.2.7)$$

Strömen geladene Teilchen mit der Geschwindigkeit \vec{v} durch ein orientiertes Flächenelement $d\vec{\Gamma}$, so sind im Zeitinkrement dt all jene Teilchen durch die Fläche geflossen, die sich im Inneren eines schiefen Zylinders mit Grundfläche $d\vec{\Gamma}$ und Mantelvektor $d\vec{s} = \vec{v} dt$ befinden. Sein Volumen $d\Omega$ (Grundfläche mal Höhe) beträgt

$$d\Omega = d\vec{s} \cdot \hat{n} d\Gamma = d\vec{s} \cdot d\vec{\Gamma} = \vec{v} \cdot d\vec{\Gamma} dt. \quad (3.2.8)$$

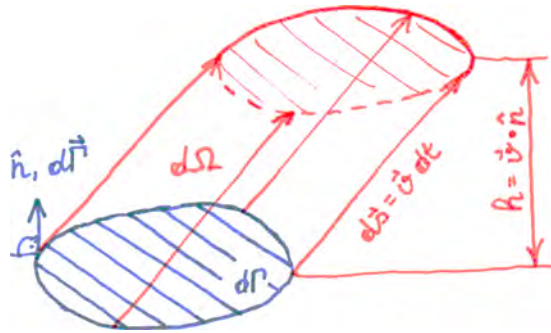


Abbildung 3.2.1: Ladungstransport durch ein Flächenelement.

Mit der Raumladungsdichte ρ ergibt sich die durch die Fläche geströmte Ladung dQ als

$$dQ = \rho d\Omega = \rho \vec{v} \cdot d\vec{\Gamma} dt \stackrel{(3.2.6)}{=} \vec{J} \cdot d\vec{\Gamma} dt, \quad (3.2.9)$$

und ein abschließender Vergleich mit (3.2.6) führt auf den Zusammenhang

$$\vec{J} = \rho \vec{v}. \quad (3.2.10)$$

3.2.4 Kontinuitätsgleichung der elektrischen Ladung

Wegen Ladungserhaltung kann sich die Gesamtladung im Inneren eines Körpers Ω nur durch den Zu- oder Abfluss von Ladungen durch seine Berandung $\partial\Omega$ ändern. Orientiert man diese – wie allgemein üblich – aus dem Körper weisend, so folgt die folgende Ladungsbilanz: Die zeitliche Abnahme der Ladung Q im Inneren eines Körpers Ω gleicht dem elektrischen Hüllstrom \dot{i} aus seiner Berandung $\partial\Omega$,

$$-\frac{d}{dt} Q(\Omega; t) = \dot{i}(\partial\Omega; t). \quad (3.2.11a)$$

Einsetzen der Stromdichte \vec{J} und der Raumladungsdichte ρ liefert die Darstellung

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho d\Omega = \oint_{\partial\Omega(t)} \vec{J} \cdot \hat{n} d\Gamma = \oint_{\partial\Omega(t)} \vec{J} \cdot d\vec{\Gamma}. \quad (3.2.11b)$$

Die Gl. (3.2.11a) bzw. (3.2.11b) wird auch als Kontinuitätsgleichung der elektrischen Ladung bezeichnet.

3.2.5 Wirkungen des elektrischen Stroms

Zu den wichtigsten Wirkungen des elektrischen Stroms zählen:

- Elektrische Ströme durch widerstandsbehaftete Materie gehen mit elektrischen Spannungen einher. Anwendungen sind elektrische Schaltkreise, ...
- Elektrische Ströme haben Magnetfelder zur Folge, und Magnetfelder üben Kräfte auf Ströme (bewegte Ladungen) aus. Anwendungen sind Motoren, Generatoren, Magnetkompass,
- Elektrische Ströme haben chemische Wirkungen. Insbesondere verursachen sie die Wanderung von Ionen, und chemische Reaktionen können elektrische Ströme hervorrufen. Anwendungen sind Elektrolyse, Galvanik, Batterien, ...
- Stromfluss durch widerstandsbehaftete Materie führt zu Erwärmung (Ausnahme: Supraleiter). Anwendungen sind Elektroöfen, Glühdrähte, ...
- Ströme können zu Ionisation bzw. Anregung von Elektronen führen. Anwendungen sind Leuchtstoffröhren, Röntgenröhren (charakteristische Strahlung), Glühkathoden, ...
- Beschleunigte Ladungen (auch Kreisströme) haben elektromagnetische Strahlung zur Folge. Anwendungen sind Radiowellen, Synchrotronstrahlung, Röntgenröhren (Bremsstrahlung), ...

Die biologischen Wirkungen elektrischer Ströme umfassen elektrische, chemische und thermische Beeinflussungen. Maßgeblich sind die Stromstärke, der zeitliche Stromverlauf, der Ladungsfluss und die umgesetzte Energie.

Elektrische Ströme führen zur Anregung von Muskeln und Störungen der nervösen Reizleitung, was zu Herzfimmern und in der Folge zum Tod führen kann. Diesbezüglich sind Stromflüsse in der Umgebung des Herzens besonders gefährlich. Sie erfolgen häufig im Zuge von Strompfaden von Hand zu Hand, zum Beispiel beim unabsichtlichen Berühren von Leitern auf unterschiedlichem Potenzial. Deswegen gilt beim Arbeiten mit hohen Spannungen die Regel: *Eine Hand in die Hosentasche!*

Wechselströme mit Frequenzen über circa 150 kHz haben wenig Einfluss auf Reizleitung und Muskelkontraktion. Die Wirkungen sind vorwiegend thermisch: Möglich sind Gewebeeränderungen sowie äußere und innere Verbrennungen, insbesondere längs gut leitfähiger Strombahnen (Nerven, Muskeln, Blutgefäße, ...). Mit zunehmender Frequenz dringen Wechselströme aufgrund des Skin效ekts weniger tief in das Körperinnere ein, können aber zu Verbrennungen der Haut und darunterliegenden Schichten führen. Im Tierversuch haben intensive Radiowellen im Mikrowellenbereich (1 – 10 GHz) durch lokale Erwärmung zu Schädigungen der Augenhornhaut und Eintrübung der Linse geführt. Bei noch höheren Frequenzen dominiert die lokale Erhitzung der Haut.

Ab den Frequenzen des sichtbaren Lichts besitzen die Lichtteilchen (Photonen) solch hohe Energie, dass sie ionisierende Wirkung haben. Damit sind sie in der Lage, chemische Bindungen aufzubrechen und das Erbgut zu schädigen.

3.3 Arten der Stromleitung

3.3.1 Orbitalmodell

Für die Elektronen eines einzelnen Atoms sind nur diskrete Energiezustände zulässig. Die zugehörigen Verteilungen der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Elektronen werden als Orbitale bezeichnet. Mit zunehmender Energie sind die Orbitale räumlich weniger eng um den Atomkern lokalisiert. Elektronen wechseln zwischen den diskreten Energiezuständen durch Aufnahme oder Abgabe von Energie. Ein treibender Motor hierfür ist stets die Wärme. Am absoluten Temperaturnullpunkt sind nur die niedrigsten Energieebenen besetzt. Als (erste) Ionisierungsenergie bezeichnet man die zum Entfernen des ersten Elektrons aus dem Atom benötigte Mindestenergie. Sie liefert eine obere Grenze für die Orbitalenergie, denn Elektronen höherer Energie sind nicht mehr an den Atomkern gebunden.

Nähern sich zwei Atome einander an, so kommt es zu einer Aufspaltung der Energiezustände. Diese ist umso stärker ausgeprägt, je größer die elektrische Wechselwirkung ist, bzw. je weiter sich die Orbitale in den Raum erstrecken, bzw. je höher ihr energetischer Zustand ist. Entsprechend kommt es bei der Annäherung mehrerer Atome zu entsprechend vielen Aufspaltungen der Energieniveaus, und aus den energiereicheren Orbitalen bilden sich Molekülorbitale, die sich über das gesamte Molekül erstrecken. Die Elektronen in ihnen sind keinem Einzelatom zuzuordnen, sondern sie sind delokalisiert.

Der Effekt der Aufspaltung von Energiezuständen ist keine Besonderheit der Quantenphysik, sondern wird allgemein in verkoppelten schwingungsfähigen Systeme beobachtet: Er tritt auch in der klassischen Mechanik (gekoppelte Pendel) und in elektrischen Netzwerken (gekoppelte Schwingkreise) auf.

3.3.2 Stromleitung im Vakuum

Im Vakuum gibt es keinen wirksamen Bremsmechanismus für bewegte Ladungsträger. Vernachlässigt man die Gravitation und Raumladungseffekte, so bewegen sich Ladungsträger in feldfreien Gebieten gleichmäßig, das heißt mit konstantem Geschwindigkeitsvektor.

In einem elektrischen Feldstärkefeld $\vec{E}(\vec{r})$ erfährt ein frei bewegliches Teilchen der Masse m und der Ladung Q aufgrund der Coulombkraft $\vec{F}(\vec{r})$ eine Beschleunigung $\vec{a}(\vec{r})$ gemäß

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})Q, \quad (3.3.1)$$

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = \vec{E}(\vec{r})\frac{Q}{m}. \quad (3.3.2)$$

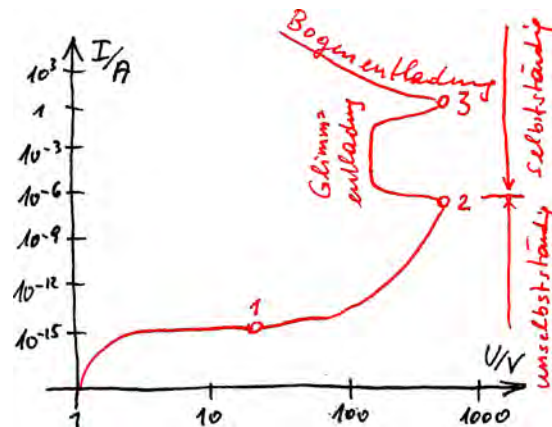


Abbildung 3.3.1: Gasentladung: (1) Erreichen der Ionisierungsenergie. (2) Beginn der selbstständigen Entladung. (3) Zünden der Bogenentladung.

Da der Geschwindigkeitszuwachs $d\vec{v}$ im Zeitinkrement dt allgemein

$$d\vec{v} = \vec{a}dt \quad (3.3.3)$$

lautet, erfährt das Teilchen in einem homogenen elektrostatischen (orts- und zeitunabhängigen) Feld im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ den Geschwindigkeitszuwachs

$$v_1 - v_0 = \int_{v_0}^{v_1} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{E} \frac{Q}{m} dt = \vec{E} \frac{Q}{m} (t_1 - t_0). \quad (3.3.4)$$

Weil der Geschwindigkeitszuwachs proportional zur Verweildauer im Feld ist, sind bei gegebener Feldstärke beliebig hohe Geschwindigkeiten erreichbar. Allerdings gilt diese Rechnung nur, solange die Geschwindigkeit klein gegenüber der Vakuumlichtgeschwindigkeit ist. Eine wesentliche Feststellung ist, dass die Geschwindigkeit bei gegebener Feldstärke von der Zeit und damit vom Ort abhängt.

3.3.3 Stromleitung in Gasen

Wie im Vakuum beruht die Stromleitung in Gasen auf bewegten Elektronen und Ionen [4, pp. 432]. In Anwesenheit eines elektrischen Feldes werden diese Ladungsträger beschleunigt und gewinnen hierdurch kinetische Energie. Zwischen den bewegten Ladungsträgern und den Gasteilchen kommt es zu einer Vielzahl von Stößen. Die mittlere Weglänge zwischen aufeinanderfolgenden Stößen heißt *mittlere freie Weglänge*. Die Abgrenzung gegenüber Stromleitung im Vakuum erfolgt üblicherweise bei mittleren freien Weglängen im Bereich um 10 cm. Eine qualitative Strom-Spannungskennlinie zeigt Abb. 3.3.1.

Unselbstständige Entladung

Der Bereich der unselbstständigen Entladung ist dadurch gekennzeichnet, dass Stromfluss nur durch externe Generierung freier Ladungsträger möglich ist: Häu-

fig wird Röntgenstrahlung oder Radioaktivität zur Ionisierung benutzt.

Bei niedrigen Feldstärken sind nahezu alle Gasteilchen elektrisch neutral, und die kinetische Energie der wenigen freien Ladungsträger reicht nicht aus, um bei Stößen Gasteilchen zu ionisieren. In Abb. 3.3.1 ist das ausgeprägte Plateau links von Punkt 1 auffällig, in dem der Strom nicht von der Spannung abhängt. In diesem Bereich begrenzt die durch den externen Ionisator pro Zeiteinheit erzeugte Anzahl an Ladungsträgerpaaren den Strom.

Bei Erhöhung der Feldstärke erreicht die kinetische Energie der bewegten Ladungsträger die Ionisierungsenergie der Gasteilchen. Die Stöße erfolgen unelastisch und generieren weitere Ladungsträgerpaare. In diesem Bereich nimmt der Strom mit der Spannung stark zu. Allerdings rekombinieren auch Ladungsträgerpaare und tragen danach nicht länger zum Stromfluss bei. Solange die Rekombinationsrate überwiegt, bleibt die Entladung unselbstständig.

Selbstständige Entladung

In Abb. 3.3.1 markiert Punkt 1 die Grenze, an der die Generationsrate die Rekombinationsrate übersteigt. Die zugehörige Spannung heißt Durchschlagspannung.

Wird der zugehörige Strom überschritten, so kommt es durch die Stoßionisation der Gasteilchen zu einem Lawineneffekt. Daher muss der Strom extern begrenzt werden, z.B. durch einen Vorwiderstand. Dennoch bleibt die Temperatur des Gases über einen weiten Strombereich hinweg nahezu unverändert. Man nennt ihn den Bereich der Glimmentladung, weil Elektronen in der Hülle der Gasteilchen, die bei Stoßprozessen in energiereichere Zustände gehoben worden sind, beim Zurückfallen elektromagnetische Wellen mit für das Gas typischen Wellenlängen abgeben. So leuchtet Neon rot und Stickstoff gelb. Der in Leuchtstoffröhren (einschließlich Energiesparlampen) eingesetzte Quecksilberdampf erzeugt vornehmlich ultraviolette Strahlung, die durch eine fluoreszierende Schicht an der Röhrenwand in sichtbares Licht umgesetzt wird.

Abb. 3.3.1 zeigt, dass es im Bereich der Glimmentladung die Spannung über einen weiten Strombereich nahezu konstant bleibt. Dieser Effekt ist in der Vergangenheit zur Spannungsstabilisierung ausgenutzt worden.

Erhöht man den Strom weiter, so setzen zusätzliche Ionisierungsprozesse ein, und beim Erreichen von Punkt 3 Abb. 3.3.1 zündet ein Lichtbogen. Dieser ist durch einen kleinen Brennfleck auf der Kathode und ein heißes Plasma gekennzeichnet.

Die Bogenentladung wird technisch in Leuchtmitteln, Schweißgeräten und Schmelzöfen ausgenutzt. Da sich Lichtbögen – unterstützt durch geeignete Formgebung des Entladungsgefäßes – im Nanosekundenbereich ausbilden können, werden Sonderformen von Gasentladungsröhren auch in Schutzeinrichtungen eingesetzt.

3.3.4 Stromleitung in Elektrolyten

Grundbegriffe der Elektrochemie

Definition 3.3.1 (Oxidation). Chemische Reaktion, in dem ein geladenes oder ungeladenes Teilchen Elektronen abgibt.

Definition 3.3.2 (Reduktion). Chemische Reaktion, in der ein geladenes oder ungeladenes Teilchen Elektronen aufnimmt.

Definition 3.3.3 (Redoxreaktion). Chemische Reaktion der Elektronenübertragung: Hierbei wird ein Teilchen oxidiert, und das andere reduziert.

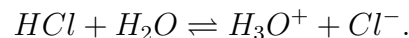
Definition 3.3.4 (Dissoziation). Zerfall eines Stoffes in Bestandteile.

Definition 3.3.5 (Heterolytische Dissoziation). Dissoziation in ungleichnamig geladene Ionen.

Definition 3.3.6 (Elektrolyt). Festkörper oder Flüssigkeit mit beweglichen Ionen.

Elektrolyte sind zumeist flüssig. Sie entstehen durch heterolytische Dissoziation von ionischen Kristallen (Salzkristalle) oder polaren Molekülen beim Schmelzen oder Lösen in Wasser. Bei der Dissoziation von Molekülen findet eine Redoxreaktion statt.

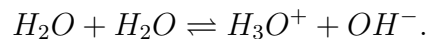
Beispiel 3.3.1 (Salzsäure). Salzsäure entsteht durch heterolytische Dissoziation von Chlorwasserstoffgas (HCl) beim Lösen in Wasser (H₂O):



Bei dieser Redoxreaktion wird das Cl-Atom zu einem Cl⁻-Anion reduziert, und das H-Atom zu einem Proton oxidiert, das mit dem Wassermolekül ein Oxonium-Kation bildet.

Die Stromleitung in Elektrolyten beruht auf der Bewegung von Ionen im elektrischen Feld. Kennzeichnend ist, dass der Elektrolyt hierbei eine stoffliche Veränderung erfährt, weil Kationen und Anionen in entgegengesetzte Richtungen wandern.

Beispiel 3.3.2 (Leitfähigkeit chemisch reinen Wassers). Wasser dissoziiert in geringem Grad gemäß der Redoxreaktion



Durch die resultierenden Oxonium- und Hydroxid-Ionen besitzt chemisch reines Wasser eine geringe elektrische Leitfähigkeit.

Definition 3.3.7 (Kathode). Jene Elektrode, die Elektronen abgibt.

Definition 3.3.8 (Anode). Jene Elektrode, die Elektronen aufnimmt.

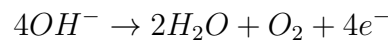
An der Kathode werden Teilchen reduziert, weil sie dort Elektronen aufnehmen. An der Anode werden Teilchen oxidiert, weil sie dort Elektronen abgeben.

Elektrolyse

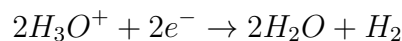
Legt man an zwei Elektroden eine Gleichspannung an und taucht diese in einen Elektrolyten, so bildet sich in diesem ein elektrisches Feld aus. Unter dem Einfluss der Coulombkraft wandern Kationen zu Kathode und werden an dieser reduziert, während sich Anionen zur Anode bewegen und an dieser oxidiert werden. Diese durch den elektrischen Stromfluss hervorgerufene stoffliche Veränderung des Elektrolyten bezeichnet man als Elektrolyse. Kennzeichnend ist, dass der durch eine elektrische Gleichspannung hervorgerufene Stromfluss zu einer Redoxreaktion führt. Elektrolyse setzt erst oberhalb einer kritischen Spannung ein, die vom Elektrolyten sowie den Elektrodenmaterialien abhängt (Nernstsche Gleichung).

Technische Anwendungen liegen in der Abscheidung von Gasen und Metallen. Das Aufbringen dünner metallischer Schichten auf leitfähigen Oberflächen mittels elektrolytischer Prozesse wird als Galvanisieren bezeichnet.

Beispiel 3.3.3 (Elektrolyse von Wasser). Durch Selbstdissoziation sind im Wasser H_3O^+ - und OH^- -Ionen anwesend. An der Anode werden die Hydroxid-Ionen oxidiert, wobei gemäß



Wasser und molekularer Sauerstoff entstehen. An der Kathode werden die Oxonium-Ionen reduziert, wobei gemäß



Wasser und molekularer Wasserstoff entstehen.

Beispiel 3.3.4 (Natriumabscheidung). In der Schmelze dissoziiert Kochsalz zu



Bringt man ein an Gleichspannung liegendes Elektrodenpaar in die Schmelze ein, so erfolgt eine Elektrolyse gemäß



Der Prozess eignet sich zur Abscheidung unedler Metalle, hier: Natrium. An der Anode wird molekulares Chlorgas freigesetzt.

Galvanische Zellen

Galvanische Zellen, zu denen Batterien, Akkumulatoren und Brennstoffzellen zählen, kehren der Prozess der Elektrolyse um: In ihnen dienen Redoxreaktionen zur Erzeugung von Gleichspannung.

3.3.5 Stromleitung in Festkörpern – Bändermodell

Ein für eine breite Klasse von Festkörpern anwendbares Modell ist der ideale Kristall. Darunter soll ein Festkörper mit streng periodischer Struktur verstanden werden. (Da es auch Quasikristalle mit nicht-periodischer Packettierung gibt, ist diese Definition veraltet.)

In einem Kristall führt die periodische Anordnung der Atomkerne mit Abständen im Bereich einiger Å (100 pm) zur mannigfachen Aufspaltung der diskreten Niveaus, die hierdurch zu Bändern verschmieren. Für die energiearmen Zustände ist die Wechselwirkung gering. Daher sind die resultierenden Bänder energetisch schmal und die Orbitale um die Atomkerne lokalisiert. Energiereiche Zustände hingegen führen zu energetisch breiten Bändern und Orbitalen, die sich über den gesamten Kristall erstrecken.

Am absoluten Temperaturnullpunkt verschwindet die thermische Anregung, sodass vom niedrigsten Zustand bis zu einer kritischen Energie hinauf alle zulässigen Niveaus voll besetzt sind, während darüber alle Niveaus unbesetzt bleiben. Für die Stromleitung in Kristallen ist von grundlegender Bedeutung, ob das energiereichste Band voll oder nur teilweise besetzt ist. Man definiert:

Definition 3.3.9 (Leitungsband). Das energieärmste Band, das am absoluten Temperaturnullpunkt teilweise besetzt oder unbesetzt ist.

Definition 3.3.10 (Valenzband). Das energiereichste Band unterhalb des Leitungsbandes.

Definition 3.3.11 (Bandabstand). Die Differenz zwischen dem höchsten Energieniveau eines Bandes und des niedrigsten Energieniveaus eines darüber liegenden Bandes.

3.3.6 Nichtleiter und Halbleiter

Besitzt ein Stoff am absoluten Temperaturnullpunkt ein unbesetztes Leitungsband, dann sind alle Bänder voll besetzt. Mit Energien kleiner als der Bandabstand zwischen Valenz- und Leitungsband ist die Anregung von Elektronen unmöglich. Der Stoff ist am absoluten Temperaturnullpunkt nicht leitfähig. Beträgt der Bandabstand mehr als 3 eV, spricht man von einem Nichtleiter oder Isolator, andernfalls von einem Halbleiter.

Bei Erhöhung der Temperatur werden Elektronen zunehmend durch thermische Anregung vom Valenz- in das Leitungsband gehoben. Hierdurch entstehen in beiden Bändern eng aneinander liegende freie Energieniveaus, auf die Elektronen durch beliebig kleine Energiezufuhr gehoben werden können: Der Stoff besitzt eine gewisse Eigenleitfähigkeit. Diese nimmt mit der Temperatur zu und ist bei Halbleitern wegen des geringeren Bandabstandes stärker ausgeprägt.

Typische Nichtleiter sind Salze (Metalloxide), weil diese Ionenkristalle ausbilden.

Zu den technisch wichtigen Halbleitern zählen Silizium (Si), Germanium (Ge), Galliumarsenid (GaAs) und Galliumnitrid (GaN). Die Leitfähigkeit von Halbleitern ist durch den gezielten Einbau von Fremdatomen in weiten Grenzen steuerbar (Störleitung).

3.3.7 Leiter

Besitzt ein Stoff am absoluten Temperaturnullpunkt ein teilweise besetztes Leitungsband, dann gibt es in ihm auch eine große Anzahl eng aneinander liegender freier Niveaus, auf die Elektronen durch beliebig kleine Energiezufuhr gehoben werden können. Der Stoff ist elektrisch leitfähig, und die Leitungselektronen verhalten sich ähnlich einem klassischen Gas („freies Elektronengas“): Weil im idealen Kristall jedes Atom zumindest ein Elektron beisteuert, ist die Anzahl der an der Stromleitung beteiligten Ladungsträger ist sehr groß. Legt man eine elektrische Feldstärke an, so werden die Leitungselektronen durch die Coulombfeld beschleunigt, geben ihre Energie aber in einer Vielzahl von Stoßprozessen in Form von Stromwärme ab. Die Stoßpartner sind Kristallstörungen (Versetzungen, Fremdatome, ...) und Gitterschwingungen. Dabei liegt die mittlere freie Weglänge in der Größenordnung von einigen 10 nm.

Das Ohmsche Gesetz

Definition 3.3.12 (Driftgeschwindigkeit \vec{v}_D). Mittlere Geschwindigkeit der Leitungselektronen in einer Abfolge von Beschleunigungen im Coulombfeld und Energieabgaben durch Stoßprozesse.

Die Driftgeschwindigkeit ist der elektrischen Feldstärke proportional. Sie liegt bei Metallen und technisch üblichen Stromdichten (10 A/mm^2) im Bereich von mm/s. Ihr überlagert sich eine ungeordnete Wärmebewegung, deren Schnelligkeit bei Raumtemperatur in der Größenordnung von 1000 km/s liegt. Die ausgeprägte Wärmebewegung der Leitungselektronen bedeutet auch, dass diese über die auch in Isolatoren vorhandenen Gitterschwingungen hinaus einen wesentlichen Beitrag zur Wärmeleitung leisten. Daher sind metallische Kristalle auch gute Wärmeleiter (Wiedemann-Franz'sches Gesetz).

Definition 3.3.13 (Beweglichkeit μ). Stoffspezifischer Proportionalitätsfaktor von der elektrischen Feldstärke zur Driftgeschwindigkeit:

$$\vec{v}_D = \mu \vec{E}. \quad (3.3.5)$$

Somit folgt bei einer räumliche Dichte der Leitungselektronen ρ_e die Stromdichte \vec{J} gemäß

$$\vec{J} = \rho_e \vec{v}_D \stackrel{(3.3.5)}{=} (\rho_e \mu) \vec{E}. \quad (3.3.6)$$

Daher ist die Stromdichte proportional zur Feldstärke!

Definition 3.3.14 (Elektrische Leitfähigkeit σ). Stoffspezifischer Proportionalitätsfaktor von der elektrischen Feldstärke zur Stromdichte:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \dots \text{differenzielle Form des Ohmschen Gesetzes.} \quad (3.3.7a)$$

In der deutschsprachigen Literatur ist auch das Formelzeichen κ gebräuchlich.

Definition 3.3.15 (Spezifischer Widerstand ρ). Stoffspezifischer Proportionalitätsfaktor von der Stromdichte zur Feldstärke:

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad \dots \text{differenzielle Form des Ohmschen Gesetzes.} \quad (3.3.7b)$$

Wegen (3.3.6) gilt

$$\sigma = \rho_e \mu. \quad (3.3.8)$$

Der Vergleich von (3.3.7a) und (3.3.7b) liefert

$$\rho = \sigma^{-1}. \quad (3.3.9)$$

3.3.8 Supraleiter

Supraleiter sind Stoffe, deren elektrischer Widerstand bei Unterschreitung einer kritischen Temperatur, der Sprungtemperatur T_c , auf einen verschwindend kleinen Wert absinkt. Hierzu zählen viele Metalle wie Wolfram, Quecksilber, Blei und Aluminium, aber auch gewisse keramische Werkstoffe. Die Sprungtemperatur beträgt für Quecksilber 4.2 K und für Hochtemperatur-Supraleiter im Bereich um 90 – 250 K. Der Zustand der Supraleitfähigkeit stellt einen eigenen Aggregatzustand dar. Er ist auch dadurch gekennzeichnet, dass externe Magnetfelder aus dem Inneren des Supraleiters verdrängt werden (Meißner-Oxenfeld-Effekt).

Technisch angewandt wird Supraleitung immer dann, wenn der Vermeidung von Leitungsverlusten besondere Bedeutung zukommt. Beispiele sind Spulen für die in der Kernspintomographie benötigten starken Magnetfelder, verlustarme Hohlraumresonatoren zur Erzeugung von Mikrowellenfeldern hoher elektrischer Feldstärke und Übertragungsleitungen für lange Entfernungen.

3.4 Das stationäre elektrische Strömungsfeld

Stationäre Felder sind zeitlich unveränderliche Felder. Im Gegensatz zu statischen Feldern schließt dies Ladungsbewegungen nicht aus: Im stationären elektrischen Strömungsfeld sind

- die Verteilung des elektrischen Stroms und
- die Verteilung der elektrischen Ladung

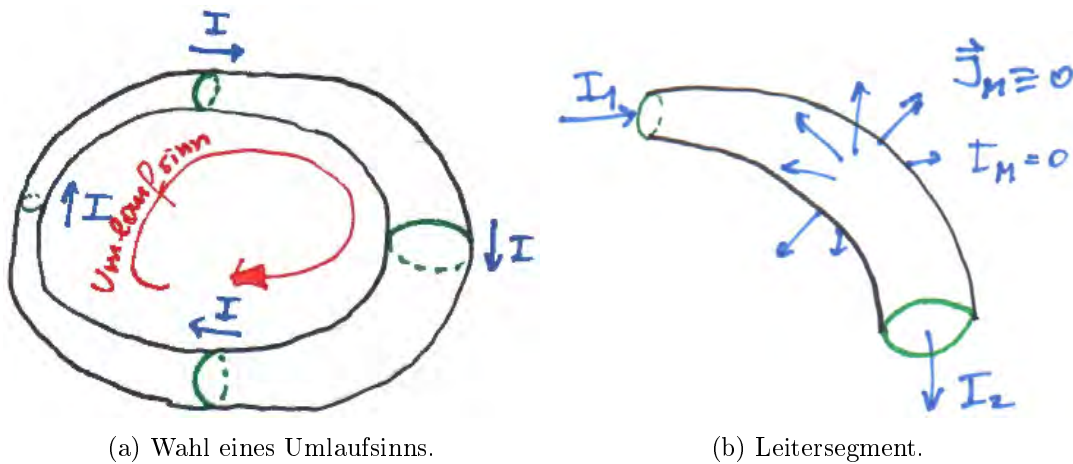


Abbildung 3.4.1: Stationärer Strom durch eine unverzweigte Leiterschleife.

in zeitlich unveränderlich. Weil die Ladungsdichte zeitlich konstant ist, gilt dies in jedem zeitlich unveränderlichen Körper Ω auch für die Gesamtladung $Q(\Omega)$:

$$\frac{d}{dt}Q(\Omega; t) = 0 \quad \dots \text{im stationären Fall.} \quad (3.4.1)$$

Gemäß der Kontinuitätsgleichung (3.2.11a) bedeutet dies, dass der aus dem Körper durch die Berandung $\partial\Omega$ fließende Hüllstrom $\dot{i}(\partial\Omega)$ verschwindet:

$$\dot{i}(\partial\Omega) = 0 \quad \dots \text{Kontinuitätsgleichung im stationären Fall.} \quad (3.4.2)$$

3.4.1 Die unverzweigte Leiterschleife

Abb. 3.4.1a zeigt eine von nichtleitendem Material umgebene unverzweigte Leiterschleife. Legt man für diese einen Umlaufsinn willkürlich fest, so gibt dieser eine Orientierung für die Zählpfeile der Ströme durch beliebige Leiterquerschnitte vor.

Trennt man von der Schleife wie in Abb.3.4.1b ein Segment ab, so erhält man einen zylinderartigen Körper Ω . Weil der Außenraum nichtleitend ist, fließt durch die Mantelfläche kein Strom. Die Zählpfeile für den Strom I_1 durch seine Grundfläche und jenen durch seine Deckfläche I_2 orientieren wir gemäß dem gewählten Umlaufsinne. Wegen der Kontinuitätsgleichung (3.4.2) muss die Summe aller nach außen fließenden Ströme verschwinden:

$$\dot{i} = 0 = I_2 + \overbrace{(-I_1)}^{\text{Zählpfeilrichtung!}}, \quad (3.4.3)$$

$$I_1 = I_2. \quad (3.4.4)$$

Im stationären Fall fließt durch jeden Querschnitt einer unverzweigten Leiterschleife derselbe Strom.

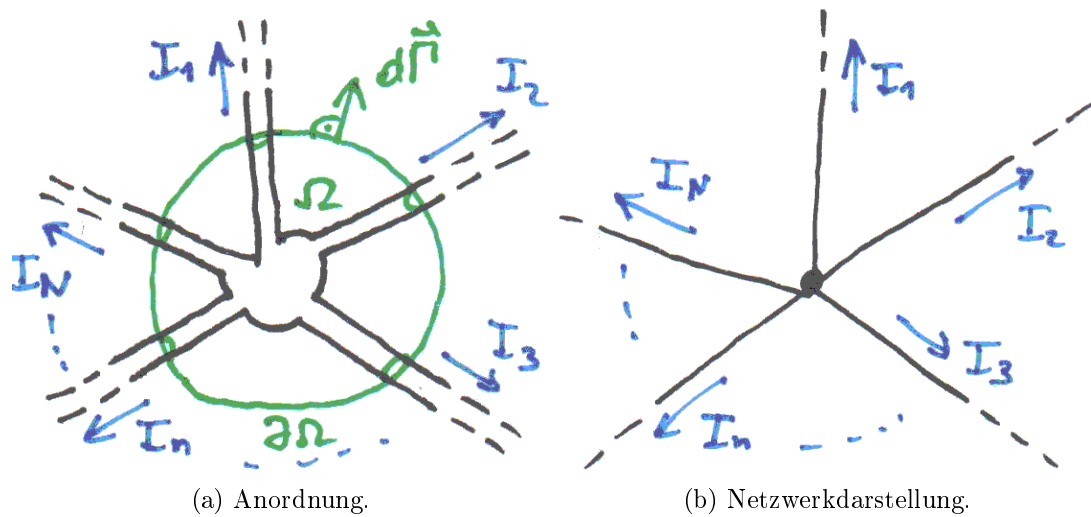


Abbildung 3.4.2: Kirchhoffsche Knotenregel: Anwendung der Kontinuitätsgleichung im stationären Fall.

3.4.2 Die Kirchhoffsche Knotenregel

Wir betrachten eine von nichtleitfähigem Material umgebene Verbindung von N Leitern. Wie in Abb.3.4.2a dargestellt, wählen wir um die Verbindung ein Gebiet Ω , dessen nach außen weisende Hüllfläche $\partial\Omega$ von den Leitern durchstoßen wird. Entsprechend orientieren wir die Zählpfeile der Leiterströme I_1, \dots, I_N nach außen. Anwenden der Kontinuitätsgleichung (3.4.2) liefert unmittelbar

$$\begin{aligned} \dot{i}(\partial\Omega) &= 0, \\ \sum_{n=1}^N I_n &= 0 \quad \dots \text{Kirchhoffsche Knotenregel.} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

In der Netzwerktheorie nennt man eine Verbindung von Leitern einen Netzwerkknoten. Weiterhin soll der Netzwerkknoten keine Ladung speichern, weil hierfür das Netzwerkelement Kapazität vorgesehen ist. Lösbare Knoten werden durch ungefüllte Ringe und nicht lösbare durch gefüllte Ringe dargestellt. Linienartige Leiter werden durch durchgezogene Linien ersetzt. Abb. 3.4.2a zeigt die Netzwerkdarstellung der Anordnung aus Abb. 3.4.2b. Im Rahmen der Netzwerktheorie ist (3.4.5) als *Kirchhoffsche Knotenregel* bekannt:

- Die Summe aller aus einem Netzwerkknoten fließenden Ströme ist null.

Weil der Netzwerkknoten per Definition keine Ladung speichert, ist $Q(\Omega) = 0$ erfüllt, sodass die Kirchhoffsche Knotenregel auch im zeitabhängigen Fall gilt.

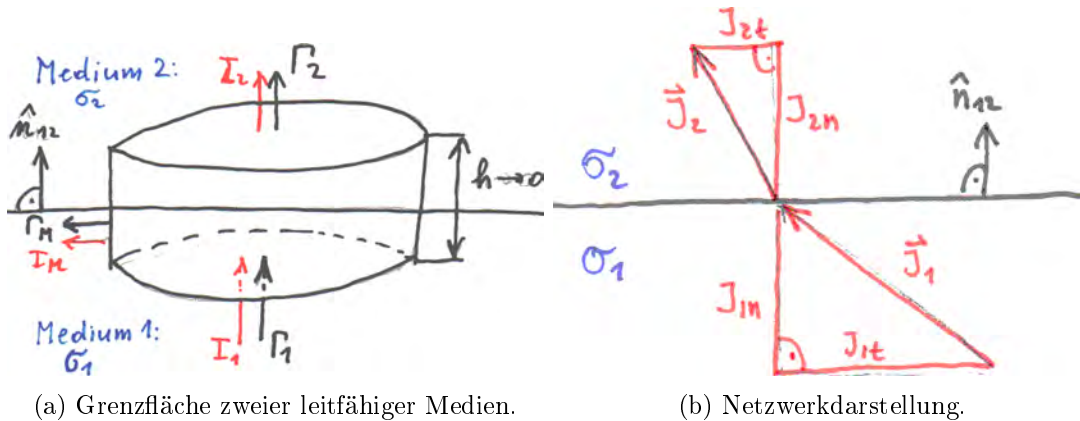


Abbildung 3.5.1: Grenzflächenbedingung für die elektrische Stromdichte.

3.5 Grenzflächenbedingung für die Stromdichte

Weil die elektrische Stromdichte \vec{J} eine Flussdichte beschreibt, erfolgt die Herleitung der Grenzflächenbedingung analog zum Fall der elektrischen Flussdichte \vec{D} :

Abb. 3.5.1a zeigt die – als glatt angenommene – Grenzfläche zweier Medien. Die Abkürzung \hat{n}_{12} bezeichnet die vom Medium 1 in das Medium 2 weisende Flächennormale. Um die Grenzfläche legt man einen Zylinder Ω mit der Grundfläche Γ_1 im Medium 1, der Deckfläche Γ_2 im Medium 2 und der Mantelfläche Γ_M . Die Grund- und die Deckfläche sollen in Richtung der Flächennormale \hat{n}_{12} orientiert sein, und die Mantelfläche möge aus dem Zylinder weisen; die jeweiligen Ströme werden mit i_1, i_2 und i_M bezeichnet.

Im stationären Fall besagt die Kontinuitätsgleichung (3.4.2), dass der aus dem Zylinder fließende Hüllstrom verschwindet:

$$\dot{i}(\partial\Omega) = -i_1 + i_2 + i_M = 0. \tag{3.5.1}$$

Lässt man die Zylinderhöhe h so gegen Null streben, dass sich Γ_1 und Γ_2 von entgegengesetzten Seiten an die Grenzfläche Γ schmiegen, so verschwinden die Mantelfläche Γ_M und der Mantelstrom i_M ,

$$i_M \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0. \tag{3.5.2}$$

Nach dem Grenzübergang gelten für die Ströme i_1 und i_2 sowie die jeweiligen Stromdichten \vec{J}_1 und \vec{J}_2 die Beziehungen

$$i_2 - i_1 = 0, \tag{3.5.3}$$

$$\int_{\Gamma} \vec{J}_2 \cdot \hat{n}_{12} d\Gamma - \int_{\Gamma} \vec{J}_1 \cdot \hat{n}_{12} d\Gamma = 0, \tag{3.5.4}$$

$$\int_{\Gamma} (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \hat{n}_{12} d\Gamma = 0. \tag{3.5.5}$$

Diese Gleichung ist für beliebige Grenzflächen erfüllt, wenn

$$\vec{J}_2 \cdot \hat{n}_{12} = \vec{J}_1 \cdot \hat{n}_{12}, \quad (3.5.6)$$

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (3.5.7)$$

gilt, worin J_{1n} bzw. J_{2n} für die Komponente der jeweiligen Stromdichte in Richtung \hat{n}_{12} steht.

- An der Grenzfläche zweier Materialien ist die Normalkomponente der elektrischen Stromdichte stetig.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass nur das Coulombfeld auftritt, und es somit keine eingepprägten Ströme gibt. Besitzen die Medien die Leitfähigkeiten σ_1 und σ_2 bzw. die spezifischen Widerstände ρ_1 und ρ_2 , so folgen die zugehörigen Normalkomponenten der elektrischen Feldstärke E_{1n} und E_{2n} aus der differenziellen Darstellung des Ohmschen Gesetzes (3.3.7):

$$E_{2n} = \rho_2 J_{2n} = \frac{1}{\sigma_2} J_{2n}, \quad (3.5.8)$$

$$E_{1n} = \rho_1 J_{1n} = \frac{1}{\sigma_1} J_{1n}, \quad (3.5.9)$$

$$\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\rho_2 J_{2n}}{\rho_1 J_{1n}} = \frac{\sigma_1 J_{2n}}{\sigma_2 J_{1n}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (3.5.10)$$

- An der Grenzfläche zweier Medien ist die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke im Allgemeinen unstetig. Der Sprung ist proportional zum Verhältnis der spezifischen Widerstände bzw. indirekt proportional zum Verhältnis der Leitfähigkeiten.

Wie im elektrostatischen Fall ist an der Grenzfläche die Tangentialkomponente E_t der elektrischen Feldstärke stetig:

$$E_{2t} = E_{1t}. \quad (3.5.11)$$

Hieraus folgen aus dem Ohmschen Gesetz (3.3.7) die Tangentialkomponenten der elektrischen Stromdichte J_{1t} und J_{2t} :

$$J_{2t} = \sigma_2 E_{2t} = \frac{1}{\rho_2} E_{2t}, \quad (3.5.12)$$

$$J_{1t} = \sigma_1 E_{1t} = \frac{1}{\rho_1} E_{1t}, \quad (3.5.13)$$

$$\frac{J_{2t}}{J_{1t}} = \frac{\sigma_2 E_{2t}}{\sigma_1 E_{1t}} = \frac{\rho_1 E_{2t}}{\rho_2 E_{1t}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (3.5.14)$$

- An der Grenzfläche zweier Medien ist die Tangentialkomponente der elektrischen Stromdichte im Allgemeinen unstetig. Der Sprung ist proportional zum Verhältnis der Leitfähigkeiten bzw. indirekt proportional zum Verhältnis der spezifischen Widerstände.

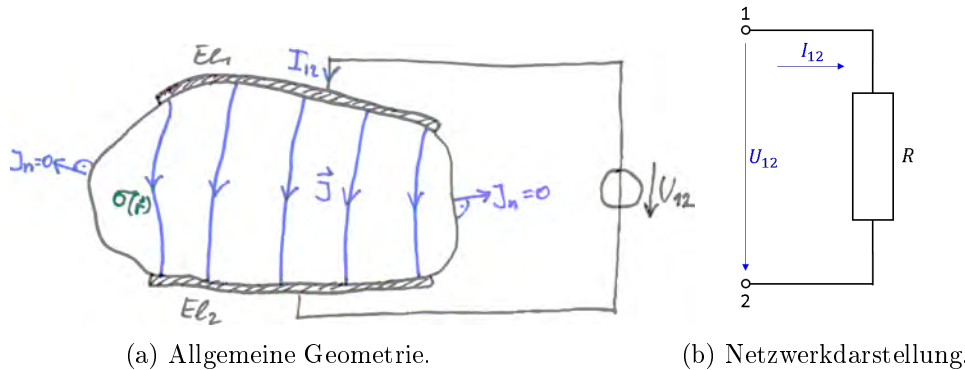


Abbildung 3.6.1: Der elektrische Widerstand.

Somit gilt für die gegen das Lot (= die Flächennormale) gemessenen Winkel α_1 und α_2 das in Abb. 3.5.1b veranschaulichte Brechungsgesetz

$$\tan \alpha_2 = \frac{J_{2t}}{J_{2n}} = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}, \quad (3.5.15)$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{J_{1t}}{J_{1n}} = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}, \quad (3.5.16)$$

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{J_{2t}}{J_{1t}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (3.5.17)$$

3.6 Der elektrische Widerstand

Abb. 3.6.1a zeigt einen leitfähigen Körper mit einer im Allgemeinen ortsabhängigen elektrischen Leitfähigkeit $\sigma(\vec{r})$. Er besitzt zwei ideal leitfähige Elektroden El_1 und El_2 (im Netzwerkmodell: Klemmen) und ist von einem nicht-leitfähigen Medium umgeben. Diese Anordnung heißt (idealer) Widerstand.

Legt man an die Elektroden die Gleichspannung U_{12} , so bilden sich nach dem Abklingen von Übergangszuständen ein stationäres Kraftfeld $\vec{E}(\vec{r})$ und ein stationäres Strömungsfeld $\vec{J}(\vec{r})$ aus, die im leitfähigen Gebiet gemäß der differentiellen Form des Ohmschen Gesetzes (3.3.7) über $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ verknüpft sind:

Aufgrund der Linearität ist die Feldstärke überall proportional zur angelegten Spannung. Damit ist die Stromdichte überall proportional zur Spannung, und in der Folge ist der Strom durch die Elektroden (Klemmen) proportional zur Spannung. Diese Gesetzmäßigkeit ist die integrale Darstellung des Ohmschen Gesetzes. Der Proportionalitätsfaktor ist eine kennzeichnende Größe der betrachteten Struktur. Man definiert:

Definition 3.6.1 (Elektrischer Widerstand R). In einem System zweier Elektroden der Proportionalitätsfaktor vom Strom zur Spannung:

$$U_{12} = RI_{12}. \quad (3.6.1a)$$

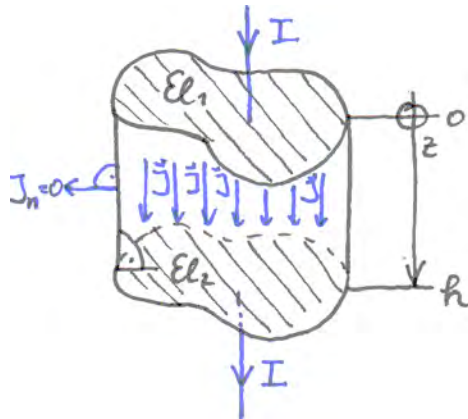


Abbildung 3.6.2: Gerader Zylinder mit homogener Leitfähigkeit und Elektroden an der Grund- und Deckfläche.

Der elektrische Widerstand wird in Ohm (Ω) gemessen:

$$[R] = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega. \quad (3.6.1b)$$

Definition 3.6.2 (Elektrischer Leitwert G). In einem System zweier Elektroden der Proportionalitätsfaktor von der Spannung zum Strom:

$$I_{12} = GU_{12} \quad . \quad (3.6.1c)$$

Der elektrische Leitwert wird in Siemens (S) gemessen:

$$[G] = \frac{\text{A}}{\text{V}} = \text{S}. \quad (3.6.1d)$$

Der Vergleich von (3.6.1c) und (3.6.1a) liefert

$$G = \frac{1}{R}. \quad (3.6.2)$$

Motiviert durch (3.6.2) werden in der englischsprachigen Literatur für die Maßeinheit des Leitwerts auch die Abkürzungen mho bzw. \mathcal{U} verwendet (Ohm verkehrt).

Beispiel 3.6.1 (Widerstand eines geraden Zylinders). Abb. 3.6.2 zeigt einen geraden Zylinder der Grundfläche A und Höhe h . Er besitzt den homogenen und isotropen spezifischen Widerstand ρ , und an seiner Grund- und Deckfläche sind Elektroden angebracht. Seine Umgebung ist nicht-leitend. Man berechne den Widerstand bzw. Leitwert der Anordnung.

Wegen des isolierenden Außenraums gilt für die Normalkomponente der Stromdichte J_n durch die Mantelfläche

$$J_n = 0. \quad (3.6.3)$$

Somit wird jeder Querschnitt vom gleichen Strom I_{12} durchflossen. Aus Symmetriegründen gilt für die Stromdichte

$$\vec{J} = \hat{e}_z J_z \quad \text{mit } J_z = \text{const.} \quad (3.6.4)$$

Integration über einen beliebigen Querschnitt liefert

$$I_{12} = \int_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{\Gamma} = \int_{\Gamma} J_z \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z d\Gamma \stackrel{J_z = \text{const.}}{=} J_z \int_{\Gamma} d\Gamma = J_z A, \quad (3.6.5)$$

$$J_z = \frac{I_{12}}{A}. \quad (3.6.6)$$

Die Feldstärke folgt aus der differentiellen Form des Ohmschen Gesetzes (3.3.7):

$$\vec{E} = \rho \vec{J} = \hat{e}_z \frac{\rho}{A} I_{12}. \quad (3.6.7)$$

die Spannung U_{12} erhält man durch Integration der Feldstärke längs eine beliebigen Weges von der Elektrode 1 zur Elektrode 2. Der Einfachheit wegen wählt man diesen parallel zur Feldstärke, also in z -Richtung:

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \frac{\rho}{A} I_{12} \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z dz = \frac{\rho}{A} I_{12} \int_1^2 dz = \frac{\rho h}{A} I_{12}. \quad (3.6.8)$$

Per Definition ergeben sich Widerstand und Leitwert zu

$$R \stackrel{(3.6.1a)}{=} \frac{U_{12}}{I_{12}} = \rho \frac{h}{A}, \quad (3.6.9)$$

$$G \stackrel{(3.6.1c)}{=} \frac{I_{12}}{U_{12}} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{h} = \sigma \frac{A}{h}. \quad (3.6.10)$$

3.6.1 Formale Beschreibung der Temperaturabhängigkeit

Die Materialeigenschaften elektrischer Leiter sind temperaturabhängig. Abweichungen von den Werten bei einer Referenztemperatur T_0 werden häufig durch ein Polynom niedriger Ordnung angenähert. Beispielsweise lautet die Darstellung des Widerstands $R(T)$

$$R(T) = R(T_0) [1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 + \dots]. \quad (3.6.11)$$

Hierin bezeichnet α den linearen Temperaturkoeffizienten und β den quadratischen Temperaturkoeffizienten. Für ihre Maßeinheiten erhält man

$$[\alpha] = K^{-1}, \quad [\beta] = K^{-2}. \quad (3.6.12)$$

Man beachte, dass die Temperaturkoeffizienten von der gewählten Referenztemperatur abhängen. Näherungen wie in (3.6.11) sind für viele physikalische Größen gebräuchlich.

3.6.2 Leistungsumsatz im Widerstand

Ausgangspunkt ist Abb. 3.6.1b mit den dargestellten Zählpfeilen für Strom und Spannung. Im stationären Fall ist die Spannung U_{12} zwischen den Elektroden des Widerstands R zeitlich konstant, und über dem Widerstand fällt ein Coulombfeld ab. Dieses verrichtet an einer Ladungsmenge ΔQ , die von der Elektrode 1 zur Elektrode 2 fließt, allgemein eine Arbeit ΔW gemäß

$$\Delta W = \Delta Q U_{12}. \quad (3.6.13)$$

Erfolgt der Ladungstransport im Zeitintervall Δt , so gelten im stationären Fall für den Strom I_{12} und die umgesetzte Leistung P die einfachen Beziehungen

$$I_{12} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \quad (3.6.14)$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (3.6.15)$$

Bezieht man (3.6.13) auf die Zeit, so folgt die grundlegende Beziehung

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} U_{12}, \quad (3.6.16)$$

$$P = I_{12} U_{12} = R I_{12}^2 = G U_{12}^2. \quad (3.6.17)$$

Offensichtlich hängt das Vorzeichen der Leistung von der Wahl der Zählpfeile für Strom und Spannung ab. Weiterhin erkennt man, dass das in Abb. 3.6.1b gewählte Zählpfeilsystem im Fall von Widerständen, also von Verbrauchern, auf positive Leistung führt. Ew wird daher als Verbraucherzählpfeilsystem (VZS) bezeichnet.

3.6.3 Reihenschaltung von Widerständen

Abb. 3.6.3a zeigt eine Reihenschaltung der Widerstände R_1, \dots, R_N . Weil es sich um einen unverzweigten Leiter handelt, fließt durch alle Widerstände derselbe Strom I . Die Spannungen U_n an den Widerständen R_n addieren sich zur Gesamtspannung U :

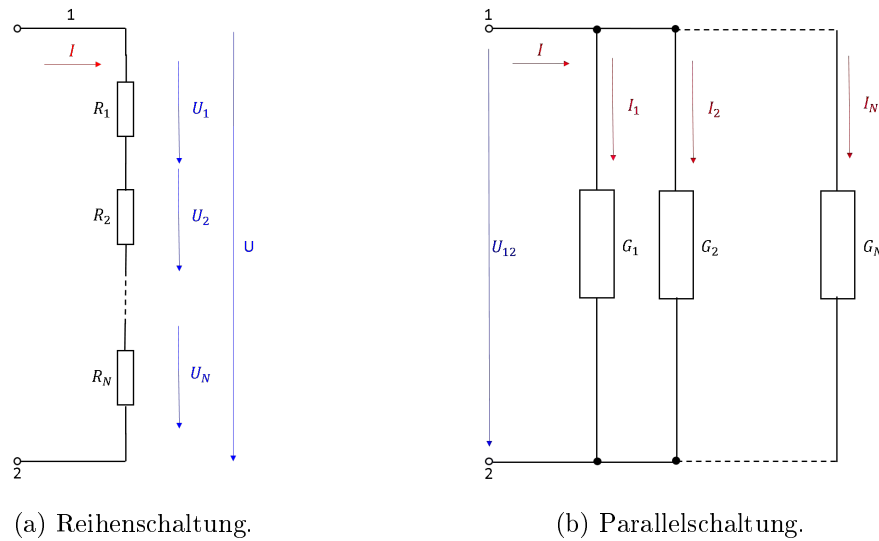
$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_N \quad (3.6.18)$$

$$= R_1 I + R_2 I + \dots + R_N I \quad (3.6.19)$$

$$= (R_1 + R_2 + \dots + R_N) I. \quad (3.6.20)$$

Der Gesamtwiderstand R_r der Reihenschaltung lautet daher

$$R_r = R_1 + R_2 + \dots + R_N. \quad (3.6.21)$$



(a) Reihenschaltung.

(b) Parallelschaltung.

Abbildung 3.6.3: Verschaltung elektrischer Widerstände.

3.6.4 Parallelschaltung von Widerständen

Abb. 3.6.3b zeigt eine Parallelschaltung der Leitwerte G_1, \dots, G_N . An allen Leitwerten liegt dieselbe Spannung U , und nach der Kirchhoffschen Knotenregel addieren sich die Ströme I_n zum Gesamtstrom I :

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N \tag{3.6.22}$$

$$= G_1 U + G_2 U + \dots + G_N U \tag{3.6.23}$$

$$= (G_1 + G_2 + \dots + G_N) U. \tag{3.6.24}$$

Der Gesamtleitwert der Parallelschaltung G_{\parallel} lautet daher

$$G_{\parallel} = G_1 + G_2 + \dots + G_N. \tag{3.6.25}$$

3.7 Ideale Spannungs- und Stromquelle

Durch den Stromfluss zufolge der Coulombkraft wird dem elektrischen Feld Energie entzogen. Zum Aufrechterhalten eines stationären Strömungsfeldes muss dieselbe Energie aus anderen physikalischen Domänen wieder zugeführt werden. Daher muss es Gebiete geben, in denen Ladungsträger zufolge nicht-elektrischer Kräfte gegen die Coulombkraft bewegt werden; man spricht von Ladungstrennung. Beispiele sind die chemische Reaktionen in galvanischen Elementen oder der mechanische Ladungstransport im Bandgenerator. Diese Gebiete werden Quellen genannt. Im stationären Fall muss im Inneren der Quelle die Summe der nicht-elektrischen Kräfte und der Coulombkraft auf die Ladungsträger verschwinden.

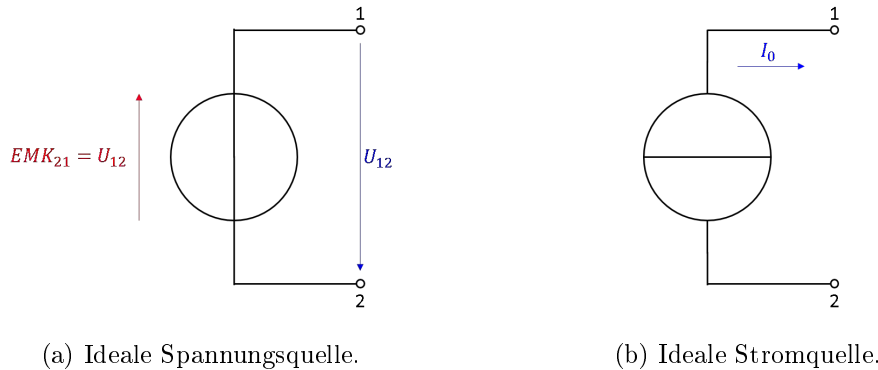


Abbildung 3.7.1: Netzwerksymbole idealer Quellen.

Weil für die Beschreibung des elektrischen Strömungsfeldes nur der Effekt der Ladungstrennung von Bedeutung ist, definiert man für Quellen idealisierte Netzwerkelemente ohne Bezug auf die zugrundeliegenden physikalischen Prozesse.

Definition 3.7.1 (Ideale elektrische Spannungsquelle). Ein Netzwerkelement mit einem Klemmenpaar $(1, 2)$, das zwischen diesem unabhängig von der Beschaltung eine Quellenspannung U_{12} aufrecht erhält. Das Netzwerksymbol ist in Abb. 3.7.1a dargestellt. Der Spannungspfeil entspricht dem Coulombfeld.

In der älteren Literatur findet man häufig den Begriff der elektromotorischen Kraft EMK. Sie bezeichnet die auf die Ladung bezogene Arbeit W , die von der nicht-elektrischen Kraft in der Spannungsquelle bei der Ladungstrennung verrichtet wird:

$$\vec{F}_{EMK} = -\vec{F}_C, \quad (3.7.1)$$

$$\frac{1}{Q}\vec{F}_{EMK} = -\vec{E}_C, \quad (3.7.2)$$

$$EMK_{21} := \frac{W_{21}}{Q} = \frac{1}{Q} \int_2^1 \vec{F}_{EMK} \cdot d\vec{s} = - \int_2^1 \vec{E}_C \cdot d\vec{s} = -U_{21}, \quad (3.7.3)$$

$$EMK_{21} = U_{12}. \quad (3.7.4)$$

Hierin bezeichnet $(\cdot)_{21}$ einen Weg im Inneren der Quelle von der Klemme 2 zur Klemme 1. Man beachte, dass die EMK keine Kraft, sondern eine spannungsartige Größe darstellt!

Definition 3.7.2 (Ideale elektrische Stromquelle). Ein Netzwerkelement mit einem Klemmenpaar, das zwischen diesen unabhängig von der Beschaltung einen Quellenstrom I_0 aufrecht erhält. Das Netzwerksymbol ist in Abb. 3.7.1b dargestellt. Die Zählrichtung des Quellstroms wird durch einen Pfeil angegeben.

Ideale Strom- und Spannungsquellen sind in der Lage, unendliche Leistung in das elektrische Feld einzubringen.

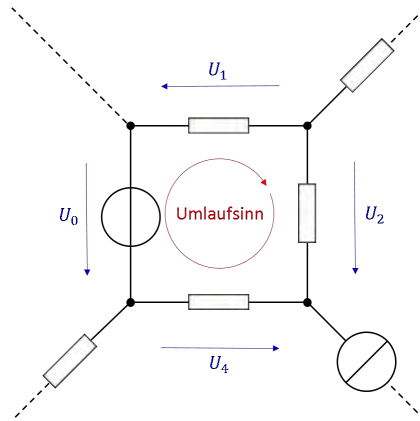


Abbildung 3.8.1: Netzwerkmache mit Umlaufsinn und Spannungszählpfeilen.

3.8 Die Kirchhoffsche Maschenregel

Eine Masche ist ein geschlossener Netzwerkpfad. Außerhalb der Netzwerkelemente, insbesondere der Quellen, ist das elektrische Feld ein Coulombfeld und somit konservativ.

Legt man für eine Masche längs aber nicht innerhalb der Netzwerkelemente einen orientierten Umlauf C fest, so gilt stets

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \dot{U}(C) = \sum_C U = 0. \tag{3.8.1}$$

Dies ist die Kirchhoffsche Maschenregel:

- Die Summe aller Spannungen längs eines orientierten Maschenumlaufs verschwindet.

Beispiel 3.8.1 (Maschenregel). Abb. 3.8.1 zeigt eine Masche eines elektrischen Netzwerkes mit beliebig gewählten Zählpfeilrichtungen für die Spannungen. Legt man den Sinn für den Maschenumlauf wie in Abb. 3.8.1 fest, dann folgt

$$-U_0 - U_1 + U_2 - U_4 = 0. \tag{3.8.2}$$

Kapitel 4

Magnetfelder

4.1 Allgemeines

4.1.1 Magnetismus

Bereits im Altertum erkannte man, dass Magnet Eisenstein (Magnetit, Fe_3O_4) besondere Eigenschaften aufweist:

- Er übt auf andere Magnete anziehende oder abstoßende Kräfte aus.
- Er zieht Eisen (sowie Nickel und Cobalt) an.
- Er kann Eisen permanent magnetisieren.
- Er richtet sich frei aufgehängt ungefähr in Nord-Süd-Richtung aus.

Der Name *Magnet* dürfte auf die Stadt Magnesia (nahe Izmir, Türkei), in der es Magnetitvorkommen gibt, oder auf den Hirten Magnes aus einer griechischen Sage zurückgehen.

Die Kraftwirkung zwischen Magneten scheint auf die Existenz zweier Pole hinzudeuten: Gleichnamige Pole stoßen sich ab, und ungleichnamige Pole ziehen sich an. Allerdings ist es niemals gelungen, einen einzelnen magnetischen Pol zu separieren: Magnetische Mengen sind nicht nachgewiesen.

Dass sich ein frei aufgehängter Magnet ungefähr in Nord-Süd-Richtung ausrichtet, weist darauf hin, dass auch die Erde ein Magnet ist. Eine unmittelbare Anwendung ist der Magnetkompass.

Definition 4.1.1 (Nordpol (N)). Der ungefähr zum geografischen Nordpol weisende Magnetpol.

Definition 4.1.2 (Südpol (S)). Der ungefähr zum geografischen Südpol weisende Magnetpol.

Da die magnetischen Pole der Erde nicht mit ihren geografischen Polen zusammenfallen, weicht die Kompassrichtung von der Richtung zum geografischen Nordpol ab. Diese Missweisung wird auch als Deklination bezeichnet. Sie hängt vom Ort und von der Zeit ab.

Beispiel 4.1.1 (Deklination). Am 22.01.2019 hat die Messweisung in Saarbrücken 2.09deg Ost betragen.

4.1.2 Elektromagnetismus

Um das Jahr 1820 machte der dänische Physiker Hans Christian Oersted eine grundlegende Beobachtung:

- Bewegte Ladungen bzw. Ströme rufen magnetische Erscheinungen hervor.
- Magnete üben Kräfte auf bewegte Ladungen bzw. elektrische Ströme aus.

Man spricht von Elektromagnetismus. Der heutige Wissenstand ist, dass Magnetismus stets durch bewegte Ladungen hervorgerufen wird.

4.2 Magnetfelder stationärer Ströme

4.2.1 Das Kreuzprodukt zweier Vektoren

Das Kreuzprodukt oder äußere Produkt \times zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ergibt einen Vektor. Dieser steht normal auf \vec{a} und \vec{b} und bildet mit ihnen ein Rechtssystem. Der Betrag entspricht der Fläche des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms:

$$\vec{a} \times \vec{b} : \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad (4.2.1a)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}, \quad (4.2.1b)$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}) \dots \text{Rechtssystem}, \quad (4.2.1c)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}). \quad (4.2.1d)$$

Abb. 4.2.1 veranschaulicht die Zusammenhänge. In kartesischen Koordinaten erfolgt die Berechnung anhand einer formalen, nach der ersten Zeile zu entwickelnden Determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}_{\text{Nach 1. Zeile entwickeln!}} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Mittels dieser Berechnungsvorschrift überprüft man die folgenden Rechenregeln:

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{Assoziativität}, \quad (4.2.3)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad \text{Distributivität}, \quad (4.2.4)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad \text{Antikommutativität}. \quad (4.2.5)$$

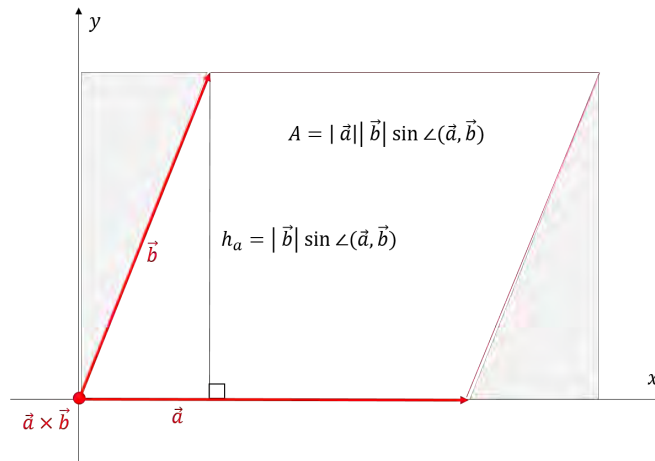


Abbildung 4.2.1: Veranschaulichung des Kreuzprodukts.

4.3 Die Lorentzkraft

Bewegt sich eine Ladung Q mit der Geschwindigkeit \vec{v} im magnetischen Feld, so erfährt sie eine Kraft \vec{F} , die man als *Lorentzkraft* bezeichnet. Versuche zeigen die folgenden Gesetzmäßigkeiten:

- Der Betrag der Kraft ist der Ladung proportional.
- Der Betrag der Kraft ist der Geschwindigkeit proportional.
- Die Richtung der Kraft steht normal auf die Geschwindigkeit.

Weil die Lorentzkraft stets normal auf die Geschwindigkeit steht, verrichtet sie keine Arbeit an dem bewegten Ladungsträger. Die genannten Eigenschaften ermöglichen, die magnetische Flussdichte über die Kraftwirkung einzuführen:

4.3.1 Die magnetische Flussdichte \vec{B}

Definition 4.3.1 (Magnetische Flussdichte \vec{B}). Eine Intensitätsgröße, die den Zusammenhang zwischen einer mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegten Ladung Q und der resultierenden Lorentzkraft vermittelt:

$$\vec{B} : \quad \vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.3.1)$$

Die magnetische Flussdichte wird in Tesla (T) gemessen:

$$[B] = \frac{[\vec{F}]}{[Q][\vec{v}]} = \frac{\text{N}}{\text{As m/s}} = \frac{\text{VA s}}{\text{mAs m}} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} =: \text{T}. \quad (4.3.2)$$

Die magnetische Flussdichte tritt durch den N-Pol eines Permanentmagneten aus. Eine alte Einheit für die Flussdichte ist das Gauß (G):

$$1\text{T} = 10^4 \text{ G} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}. \quad (4.3.3)$$

Typische Werte der Flussdichte sind in Tabelle 4.3.1 zusammengestellt.

Tabelle 4.3.1: Typische Werte der Flussdichte

Beispiel	$ \vec{B} $
Erdmagnetfeld am Äquator	$\approx 30 \mu\text{T}$
Erdmagnetfeld an den Polen	$\approx 60 \mu\text{T}$
Elektrische Maschinen	$\approx 1.4 \text{ T}$
Supraleitende Spulen (medizinische Kernspintomographie)	1.5 – 3 T
Supraleitende Spulen (Large Hadron Collider, CERN)	$\approx 8.36 \text{ T}$

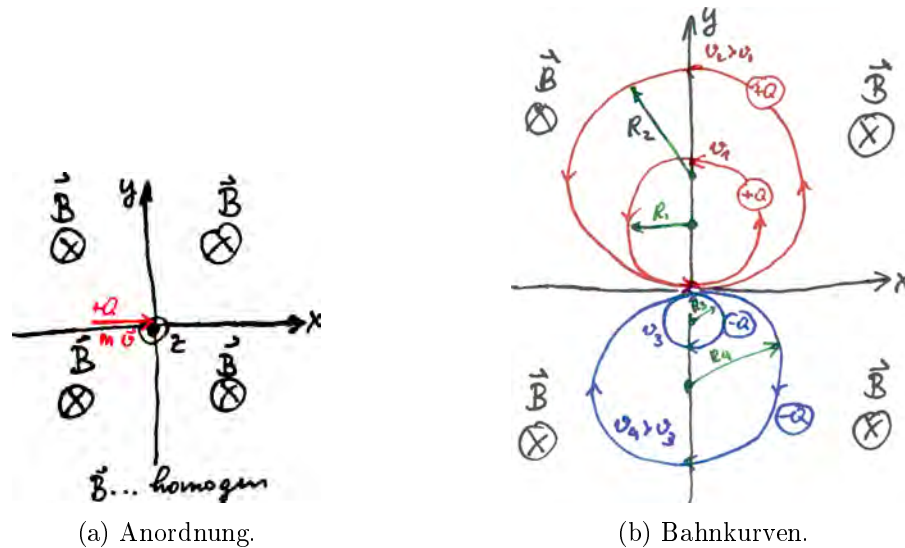


Abbildung 4.3.1: Bewegte Ladung im Magnetfeld.

Beispiel 4.3.1 (Bewegte Ladung im konstanten Magnetfeld). Wie in Abb. 4.3.1a dargestellt, bewegt sich ein Teilchen der Masse m und der Ladung Q in einem konstanten Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B} = B_z \hat{e}_z$. Am Ort $\vec{r} = 0$ beträgt seine Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r} = 0) = v_0 \hat{e}_x$. Gesucht ist die Bahnkurve.

Weil die Lorentzkraft normal auf die Geschwindigkeit steht, verrichtet sie keine Arbeit an dem Teilchen. Damit bleibt die kinetische Energie $E_k = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$ konstant. In der Folge ist der Betrag der Beschwindigkeit konstant:

$$|\vec{v}| = v_0. \quad (4.3.4)$$

Wegen $\vec{B} = B_z \hat{e}_z$ besitzt die Lorentzkraft keine z -Komponente sodass sich das Teilchen in der xy -Ebene bewegt. Daher stehen Flussdichte und Geschwindigkeit stets normal aufeinander, und es gilt stets:

$$\vec{F}_L = Q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.3.5)$$

$$|\vec{F}_L| = Qv_0B_z = \text{const}. \quad (4.3.6)$$

Also wirkt eine Kraft konstanten Betrags normal zur Geschwindigkeit: Die Lorentzkraft wirkt als Zentripetalkraft \vec{F}_z einer Kreisbewegung in der xy -Ebene,

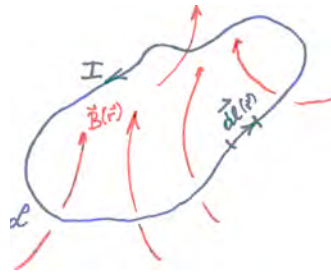


Abbildung 4.3.2: Vom einem stationären Strom I durchflossene linienartige Leiterschleife \mathcal{L} im Magnetfeld \vec{B} .

sodass sich das geladene Teilchen auf einer Kreisbahn mit Radius R durch den Ursprung des Koordinatensystems bewegt. Aus der Mechanik ist bekannt:

$$|\vec{F}_z| = m \frac{v_0^2}{R} \stackrel{(4.3.6)}{=} Q v_0 B_z, \quad (4.3.7)$$

$$R = \frac{m v_0}{Q B_z}. \quad (4.3.8)$$

Weil der Radius proportional zur Teilchenmasse ist, wird die Anordnung als Massenspektrometer verwendet. Weitere Anwendungen umfassen Blasen- und Nebelkammern in der Teilchenphysik und – in Verbindung mit einem elektrischen Wechselfeld – Ringbeschleuniger (Zyklotron).

4.3.2 Lorentzkraft auf linienartigen Leiter

Als linienartig bezeichnet man Leiter, wenn ihr (für die beabsichtigten Untersuchungen) Querschnitt vernachlässigbar ist. Ihre Geometrie wird lokal durch das Linienelement $d\vec{s}$ beschrieben und die Ladungsbewegung durch die Geschwindigkeit \vec{v} . Weil der Strom in Richtung der Leiterachse fließt, gilt

$$\vec{v} \parallel d\vec{s}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}, \quad (4.3.9)$$

wobei t für die Zeit steht.

Wir betrachten einen von einem stationären Strom I durchflossenen linienartigen Leiter in einem stationären Magnetfeld \vec{B} . Wegen (4.3.1) wirkt längs eines Linienelements $d\vec{s}$ auf die bewegte Ladung dQ eine Lorentzkraft $d\vec{F}$ gemäß

$$d\vec{F} = dQ \vec{v} \times \vec{B} = dQ \frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{B} = \frac{dQ}{dt} d\vec{s} \times \vec{B}, \quad (4.3.10)$$

$$d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}. \quad (4.3.11)$$

Die Lorentzkraft auf die in Abb. 4.3.2 gezeigte unverzweigte Leiterschleife \mathcal{L} lautet im stationären Fall ($I = \text{const!}$) somit

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \oint_{\mathcal{L}} I d\vec{s} \times \vec{B} \stackrel{\text{stationär}}{=} I \oint_{\mathcal{L}} d\vec{s} \times \vec{B} = -I \oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \times d\vec{s}. \quad (4.3.12)$$

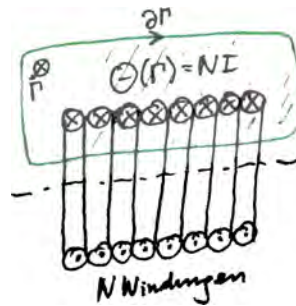


Abbildung 4.4.1: Durchflutung der orientierten Fläche Γ bzw. mit der Berandung $C = \partial\Gamma$ verkettete Durchflutung.

4.3.3 Der magnetische Fluss Φ

Definition 4.3.2 (Magnetischer Fluss Φ). Der zur magnetischen Flussdichte gehörige Fluss durch eine orientierbare Fläche Γ mit Flächennormalvektor \hat{n} :

$$\Phi(\Gamma) := \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\Gamma} = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot \hat{n} d\Gamma. \quad (4.3.13)$$

Der magnetische Fluss wird in Weber (Wb) gemessen:

$$[\Phi] = [\vec{B}][\Gamma] = \text{T m}^2 = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \text{m}^2 = \text{Vs}. \quad (4.3.14)$$

Die Erfahrung zeigt, dass der magnetische Hüllfluss durch die Berandung $\partial\Omega$ eines Körpers Ω stets verschwindet. Die magnetische Flussdichte hat weder Quellen noch Senken. Sie ist ein reines Wirbelfeld:

$$\dot{\Phi}(\partial\Omega) \equiv 0, \quad (4.3.15a)$$

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{\Gamma} \equiv 0. \quad (4.3.15b)$$

4.4 Die Anregung stationärer Magnetfelder

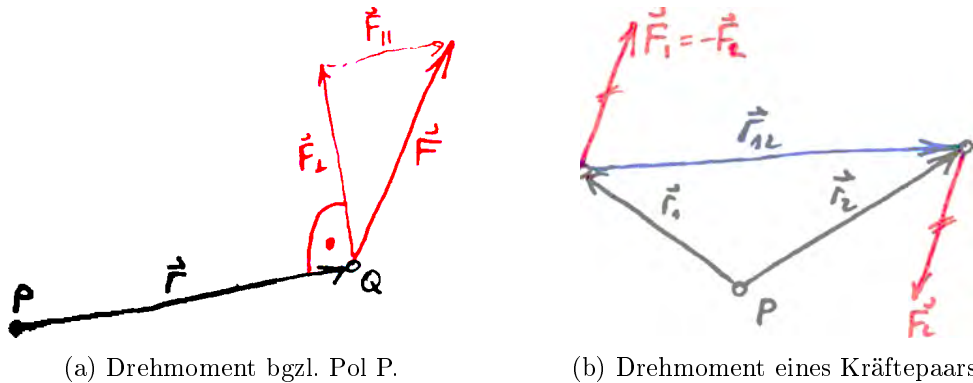
Definition 4.4.1 (Durchflutung Θ). Die Durchflutung $\Theta(\Gamma)$ einer orientierten Fläche Γ bezeichnet die Gesamtheit aller Ströme durch Γ :

$$\Theta(\Gamma) = \sum_{\Gamma} I = \int_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{\Gamma}. \quad (4.4.1)$$

Die Durchflutung wird in Amperewindungen (AWdg.) oder Ampere gemessen.

Man spricht auch von der mit der Berandung $\partial\Gamma$ verketteten Durchflutung bzw. im Falle eines einzelnen Leiters von dem mit $\partial\Gamma$ verketteten Strom.

Beispiel 4.4.1 (Leiterstrom und Durchflutung). Abb. 4.4.1 zeigt eine von dem stationären Strom I durchflossene Spule mit N Windungen. Der Leiterstrom beträgt I , aber die Durchflutung der Fläche Γ beträgt $\Theta(\Gamma) = NI$.



(a) Drehmoment bzgl. Pol P.

(b) Drehmoment eines Kräftepaars.

Abbildung 4.5.1: Mechanisches Drehmoment und Kräftepaar.

4.4.1 Der Durchflutungssatz

Die Erfahrung zeigt, dass im freien Raum zwischen der Durchflutung einer Fläche Γ bzw. der mit ihrer Berandung $\partial\Gamma$ verketteten Durchflutung und der Zirkulation der magnetischen Flussdichte \vec{B} längs $\partial\Gamma$ ein einfacher Zusammenhang besteht.

$$\Theta(\Gamma) = \oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot d\vec{s}. \quad (4.4.2)$$

Der hierin auftretende Proportionalitätsfaktor μ_0 heißt *magnetische Permeabilität des freien Raumes*. Ihr Wert beträgt

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}. \quad (4.4.3)$$

Gl. (4.4.2) beschreibt den Durchflutungssatz für den freien Raum. Er quantifiziert den Zusammenhang zwischen Strom und Magnetfeld.

4.5 Magnetfelder in Materie

4.5.1 Grundlegende Zusammenhänge aus der Mechanik

Definition 4.5.1 (Drehmoment \vec{T}). Das Drehmoment \vec{T} der im Punkt Q angreifenden Kraft \vec{F} bezüglich eines gewählten Pols P ist definiert als

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{mit } \vec{r} = \vec{PQ}. \quad (4.5.1)$$

Das Drehmoment wird in Nm gemessen.

Den Zusammenhang veranschaulicht Abb. 4.5.1a. Aus (4.5.1) ist offensichtlich, dass das Drehmoment einer Kraft hängt von der Wahl des Pols abhängt.

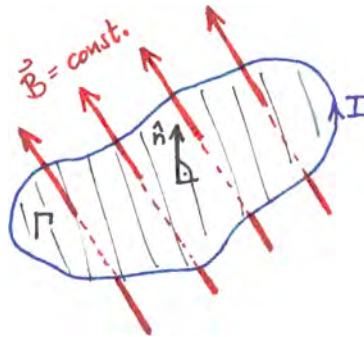


Abbildung 4.5.2: Ebene Leiterschleife im homogenen Magnetfeld.

Definition 4.5.2 (Kräftepaar). Zwei Kräfte $\vec{F}_1(\vec{r}_1)$ und $\vec{F}_2(\vec{r}_2)$ gleichen Betrags und entgegengesetzter Richtung, die in zwei unterschiedlichen Punkten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 angreifen,

$$\vec{F}_1(\vec{r}_1) = -\vec{F}_2(\vec{r}_2), \quad \text{mit } \vec{r}_1 \neq \vec{r}_2. \quad (4.5.2)$$

Wie in Abb. 4.5.1b dargestellt, erhält man das Drehmoment eines Kräftepaars durch vektorielle Addition:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ &\stackrel{(4.5.2)}{=} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{r}_{12} \times \vec{F}_2. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Im Gegensatz zum Drehmoment einer einzelnen Kraft hängt es nicht von der Wahl des Pols ab, sondern ist eine charakteristische Eigenschaft des Kräftepaars.

In der Festkörpermechanik befindet sich ein Körper im Gleichgewicht, wenn

$$\text{die Summe aller Kräfte verschwindet:} \quad \sum \vec{F} = 0; \quad (4.5.4a)$$

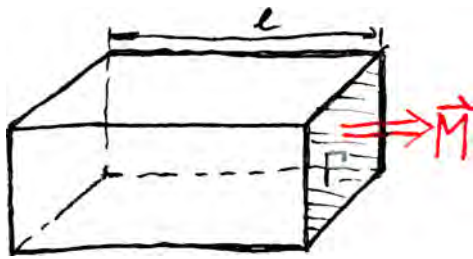
$$\text{die Summe aller Momente verschwindet:} \quad \sum \vec{T} = 0. \quad (4.5.4b)$$

4.5.2 Magnetisches Dipolmoment und Magnetisierung

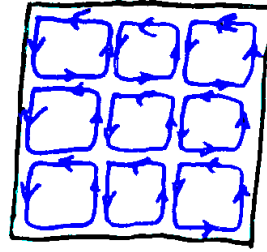
Abb. 4.5.2 zeigt eine Leiterschleife längs der Berandung einer ebenen Fläche Γ mit Flächennormalvektor \vec{n} . Sie wird von einem stationären Strom I durchflossen und befindet sich in einem homogenen Magnetfeld \vec{B} . Man kann zeigen, dass für das Drehmoment \vec{T} auf die Schleife

$$\vec{T} = I|\Gamma|\hat{n} \times \vec{B} \quad (4.5.5)$$

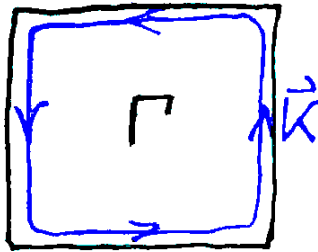
gilt. Das Drehmoment hängt vom Flächenninhalt ab, nicht aber von der Flächenform.



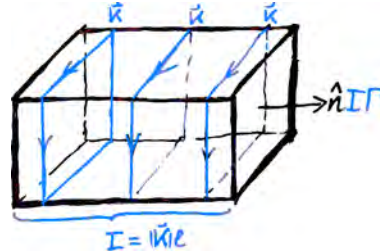
(a) Homogen magnetisierter Quader.



(b) Querschnitt: elementare Stromschleifen.



(c) Querschnitt: äquival. Mantelstrombelag.



(d) Quader mit äquival. Mantelstrombelag.

Abbildung 4.5.3: Quaderförmiger Stabmagnet mit homogener Magnetisierung.

Definition 4.5.3 (Magnetisches Dipolmoment \vec{m}).

$$\vec{m} = I|\Gamma|\hat{n} = I\vec{\Gamma}. \quad (4.5.6)$$

Damit gilt für das Drehmoment

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (4.5.7)$$

Definition 4.5.4 (Magnetisierung \vec{M}). Die räumliche Dichte des magnetischen Dipoloments:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} = \frac{d\vec{m}}{dV}. \quad (4.5.8)$$

Ihre wichtigste Anwendung besteht in der Beschreibung von Elementarströmen im Sinne des Kontinuummodells.

4.5.3 Magnetische Eigenschaften von Materie

Die Drehimpulse der Elektronenorbitale und -spins sowie der Spins der Kernteilchen weisen darauf hin, dass es auch auf atomarer Ebene bewegte Ladungen gibt und damit *Elementarströme* fließen. Wie äußere Ströme haben auch diese Magnetfelder zur Folge. Die Tatsache, dass auch das elektrisch neutrale Neutron ein nicht-verschwindendes magnetisches Moment aufweist, deutet darauf hin, dass es aus elektrisch geladenen Bausteinen, den Quarks, besteht.

Beispiel 4.5.1 (Stabmagnet). Abb. 4.5.3 zeigt einen quaderförmigen Stabmagneten mit homogener Magnetisierung. Wie in Abb. 4.5.3b dargestellt wird diese durch eine Vielzahl von über den Querschnitt verteilten elementaren Stromschleifen hervorgerufen. Weil sich im homogenen Fall die Ströme im Inneren kompensieren, sind die elementaren Schleifen äquivalent zu einer makroskopischen Stromschleife längs der Kontur; siehe Abb. 4.5.3c. Somit entspricht die Gesamtheit der elementaren Stromschleifen dem in Abb. 4.5.3d skizzierten Strombelag auf der Mantelfläche des Magneten.

4.5.4 Magnetische Erregung und Durchflutungssatz

Nach der Ampèreschen Hypothese liegen die Ursachen des magnetischen Feldes auch in Anwesenheit von Materie ausschließlich in elektrischen Strömen. Kennzeichnet man äußere Ströme mit dem Index $(\cdot)_a$ und Elementarströme mit $(\cdot)_{el}$, so erhält der Durchflutungssatz (4.4.2) für eine gegebene Fläche Γ die Form

$$\oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \sum_{\Gamma} (I_a + I_{el}). \quad (4.5.9)$$

Weil die Elementarströme nicht zugänglich sind, erweist es sich als zweckmäßig, das Magnetfeld gemäß der Art der Anregung in zwei Anteile aufzuspalten:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{H} + \vec{M}, \quad (4.5.10)$$

wobei die magnetische Erregung \vec{H} durch äußere Ströme hervorgerufen wird, und die Magnetisierung \vec{M} von Elementarströmen herrührt. Damit zerfällt (4.5.9) in

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{s} = \sum_{\Gamma} I_{el} \quad (4.5.11)$$

und die allgemeine Form des Durchflutungssatzes

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_{\Gamma} I_a. \quad (4.5.12)$$

Definition 4.5.5 (Magnetische Spannung U_M). Das Linienintegral der magnetischen Erregung \vec{H} längs eines Weges \mathcal{L} :

$$U_M(\mathcal{L}) := \int_{\mathcal{L}} \vec{H} \cdot d\vec{s}. \quad (4.5.13)$$

Mit der magnetischen Umlaufspannung $\dot{U}_M(\partial\Gamma)$ erhält der Durchflutungssatz die Form

$$\dot{U}_M(\partial\Gamma) = \sum_{\Gamma} I_a = \Theta(\Gamma). \quad (4.5.14)$$

4.5.5 Magnetische Suszeptibilität und Permeabilität

Das Anlegen eines äußeren Stroms kann elementare Schleifenströme hervorrufen (Induktion, siehe später) oder in eine Vorzugsrichtung eindrehen. Daher ist die Magnetisierung häufig eine Funktion der Erregung.

Definition 4.5.6 (Magnetische Suszeptibilität χ). Proportionalitätsfaktor von der Erregung zur Magnetisierung:

$$\chi : \quad \vec{M} = \chi \vec{H}. \quad (4.5.15)$$

Hieraus folgt für die Flussdichte die Darstellung

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}. \quad (4.5.16)$$

Zur weiteren Vereinfachung vereinbart man:

Definition 4.5.7 (Relative magnetische Permeabilität μ_r).

$$\mu_r = 1 + \chi. \quad (4.5.17)$$

Definition 4.5.8 (Magnetische Permeabilität μ).

$$\mu = \mu_0 \mu_r. \quad (4.5.18)$$

Somit gilt das einfache Materialgesetz

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}. \quad (4.5.19)$$

Im Fall einer nichtlinearen Magnetisierungskennlinie ist auch die Steigung der $B(H)$ -Kennlinie an einer gegebenen Stelle $H = H_0$ von Interesse. Sie wird durch die differenzielle Permeabilität μ_D beschrieben:

$$\mu_D := \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H} \Bigg|_{H_0} = \frac{dB}{dH} \Bigg|_{H_0}. \quad (4.5.20)$$

Der Einfachheit wegen ist hier eine skalare Darstellung benutzt worden.

Definition 4.5.9 (Magnetische Reluktivität ν). Sie bildet die Flussdichte \vec{B} auf die Erregung \vec{H} ab:

$$\nu : \quad \vec{H} =: \nu \vec{B} \quad \text{mit } \nu = \mu^{-1}. \quad (4.5.21)$$

4.5.6 Einteilung magnetischer Werkstoffe

Supraleiter ($\mu_r = 0$):

Im Innern von Supraleitern (1. Art) verschwindet die magnetische Flussdichte. Der magnetische Fluss beschränkt sich auf eine dünne Schicht an der Oberfläche. Siehe auch Kapitel 3.3.8.

Tabelle 4.5.1: Beispiele diamagnetischer Stoffe

Stoff	magnet. Suszeptibilität χ
Graphit	$-4.5 \cdot 10^{-4} / -8.5 \cdot 10^{-5}$
Bismut	$-7.1 \cdot 10^{-4}$
Germanium	$-1.6 \cdot 10^{-5}$
Wasser	$-9.0 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$-6.4 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 4.5.2: Beispiele paramagnetischer Stoffe

Stoff	magnet. Suszeptibilität χ
$\text{MnSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$	$+2.64 \cdot 10^{-3}$
Uran	$+400 \cdot 10^{-6}$
Platin	$+260 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$+22 \cdot 10^{-6}$
Sauerstoff O_2	$+1.9 \cdot 10^{-6}$

Diamagnetische Stoffe ($\mu_r < 1$):

Beim Einbringen in ein Magnetfeld werden Elementarströme induziert, die nach der Lenzschen Regel so gerichtet sind, dass sie das Feld schwächen. Mehr zur Induktion findet sich in Kapitel 5.

Dieser Effekt ist in allen Materialien vorhanden. Wegen seiner geringen Wirkung ist er jedoch nur in Stoffen beobachtbar, die ohne äußere Anregung kein resultierendes magnetisches Moment besitzen. Diamagnetismus ist bei Bismut (auch: Wismut) und Graphit am stärksten ausgeprägt. Im inhomogenen Magnetfeld werden diamagnetische Körper aus dem Feld gedrängt. Beispiele diamagnetischer Stoffe gibt Tabelle 4.5.1.

Paramagnetische Stoffe ($\mu_r > 1$):

Dies sind Stoffe, die von sich aus ein resultierendes magnetisches Moment besitzen. In Anwesenheit einer äußeren Anregung wirken Drehmomente auf die elementaren Stromschleifen, sodass sich deren Flächennormalen in die Feldrichtung eindreuen. Dies führt zu einer Verstärkung des Feldes. Nach Abschalten der Anregung gibt es durch die Wärmebewegung keine Vorzugsrichtung der elementaren Stromschleifen. Im inhomogenen Magnetfeld werden diamagnetische Körper in das Feld gezogen. Beispiele paramagnetischer Stoffe gibt Tabelle 4.5.2.

Ferromagnetische Stoffe ($\mu_r \gg 1$):

Auch in Abwesenheit einer äußeren Anregung existieren Domänen gleich ausgerichteter Magnetisierung, sogenannte Weißsche Bezirke. Man spricht von spon-

Tabelle 4.5.3: Beispiele ferromagnetischer Stoffe

Stoff	Curie-Temperatur T_C	magnet. Suszeptibilität χ
Eisen	1033 K	bis 5000
Nickel	627 K	bis 1000
Cobalt	1395 K	
Gadolinium	292.5 K	

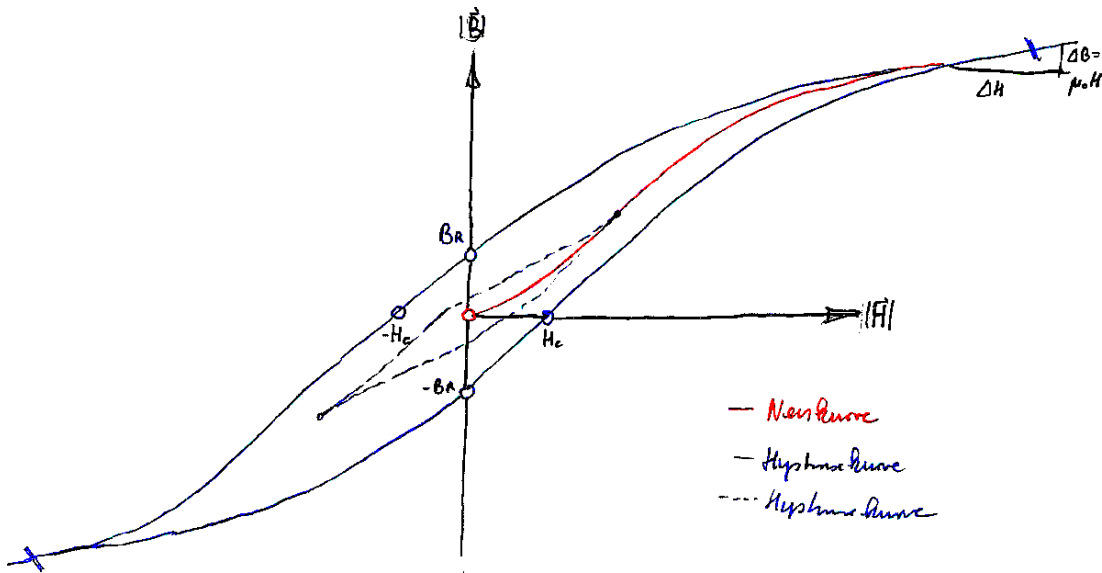


Abbildung 4.5.4: Magnetisierungskennlinie eines ferromagnetischen Stoffes.

taner Magnetisierung. Ihre Ursache liegt in Wechselwirkungen zwischen Spinmomenten; diese sind nur im Rahmen der Quantenphysik erklärbar. Magnetische Domänen haben Linearabmessungen im Bereich von nm bis μm und sind somit kleiner als die Kristallite in einem Gefüge.

Ferromagnetismus ist nur unterhalb einer kritischen Temperatur möglich, der Curie-Temperatur T_C . Darüber werden die Stoffe paramagnetisch. Beispiele ferromagnetischer Stoffe gibt Tabelle 4.5.3

Eine typische Magnetisierungskennlinie (B(H)-Kurve) zeigt Abb. 4.5.4: Im Urzustand sind die Weißschen Bezirke regellos ausgerichtet: Makroskopisch tritt keine Flussdichte auf, $|\vec{B}| = 0$. Legt man eine äußere Anregung an, so wachsen jene Domänen, deren Magnetisierungsrichtung nahe der Feldrichtung liegt. Vergrößert man den Strom bzw. H , so verschieben und drehen sich die Domänenwände. Weil hierbei energetische Barrieren zu überwinden sind, erfolgen diese Bewegungen sprunghaft; diese sogenannten Barkhausensprünge sind beobachtbar. Bei weiterer Erhöhung der Anregung ist eine ausgeprägte Sättigung erkennbar: Sind alle magnetischen Momente in Feldrichtung eingedreht, so strebt die differentielle Permeabilität gegen μ_0 : $\mu_D \rightarrow \mu_0$.

Verringert man danach den äußeren Strom und damit H bis auf Null, so verbleibt auch ohne Bestromung ($|\vec{H}| = 0$) aufgrund energetischer Barrieren eine permanente Magnetisierung. Der zugehörige Betrag der Flussdichte heißt Remanenzflussdichte B_r .

Erhöht man danach den Strom in umgekehrter Richtung, so erreicht man einen Punkt, an dem die Flussdichte verschwindet. Der zugehörige Betrag der Erregung heißt Koerzitiveerregung H_c . Entsprechend wird auf der $B(H)$ -Kennlinie der Punkt $(-H_c, 0)$ erreicht.

Erhöht man die Erregung in negativer Richtung weiter ($H \rightarrow -\infty$), so geht der Stoff in die Sättigung. Lässt man danach die Erregung durch den Nullpunkt wieder gegen große positive Werte streben, so führt die Kennlinie zunächst durch den Remanenzpunkt $(0, -B_r)$ und danach durch den Koerzitivpunkt $(H_c, 0)$ in den Bereich der Sättigung bei $H \rightarrow \infty$. Die durch die Kennlinie beschriebene Kurve heißt Hysteresekurve. Wird der Stoff nicht bis in die Sättigung getrieben, so entstehen kleinere Hysteresekurven; siehe Abb. 4.5.4. Die wesentliche Tatsache ist, dass das magnetische Verhalten – abgesehen vom Sättigungsbereich – von der Vorgeschichte abhängt. Der Teil der Magnetisierungskennlinie beim erstmaligen Aufmagnetisieren vom unmagnetisierten Zustand bis in die Sättigung heißt Neukurve.

Man kann zeigen, dass die von der Hysteresekurve eingeschlossene Fläche der Energie entspricht, die beim einmaligen Umlaufen der Hysteresekurve in Wärme umgesetzt wird. Man spricht von Ummagnetisierungsverlusten.

Nach der Form der Hysteresekurve unterscheidet man hart- und weichmagnetische Stoffe:

- Hartmagnetische Materialien besitzen eine weite Hysteresekurve mit einer großen Koerzitiveerregung H_c und einer großen Remanenzflussdichte B_r . Sie finden als Werkstoffe für Permanentmagnete Anwendung.
- Weichmagnetische Materialien besitzen eine schmale Hysteresekurve mit einer kleinen Koerzitiveerregung H_c und einer kleinen Remanenzflussdichte B_r . Diese Werkstoffe sind für Wechselfelder geeignet. Die für solche Anwendungen ebenfalls wichtige Sättigungsflussdichte B_{sat} liegt bei Eisen um 1.4 T.

4.5.7 Grenzflächenbedingungen

Wir betrachten eine glatte Grenzfläche zweier Medien mit den magnetischen Permeabilitäten μ_1 und μ_2 . Der normierte, vom Medium 1 in das Medium 2 weisende Flächennormalvektor wird mit \hat{n}_{12} bezeichnet. Weiterhin fordern wir, dass an der Grenzfläche frei von Flächenströmen sein möge.

Grenzflächenbedingung für die magnetische Flussdichte

Die Grenzflächenbedingung erhält man am einfachsten per Analogie mit der elektrischen Flussdichte an einer Grenzschicht, die frei von Flächenladungen ist. Die

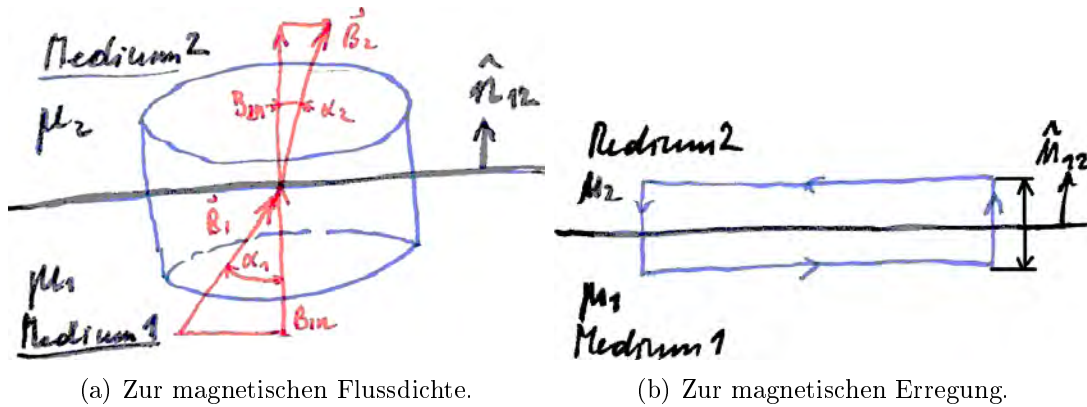


Abbildung 4.5.5: Grenzflächenbedingungen für das Magnetfeld.

elektrische Flussbilanz im ladungsfreien Fall (2.11.19) hat ergeben, dass die Normalkomponenten der elektrischen Flussdichte D_{1n} und D_{2n} stetig sind (2.11.23):

$$\dot{\psi}(\partial\Omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{2n} = D_{1n}. \quad (4.5.22)$$

Weil der magnetische Hüllfluss stets verschwindet (4.3.15), müssen per Analogie die Normalkomponenten der magnetischen Flussdichte B_{1n} und B_{2n} stetig sein:

$$\dot{\Phi}(\partial\Omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{\Gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{2n} = B_{1n}. \quad (4.5.23)$$

Wie in Abb. 4.5.5a angedeutet, könnte man einen eigenständigen Beweis ähnlich zu Kapitel 2.11.4 über den Hüllfluss durch die Berandung eines die Grenzfläche durchdringenden Zylinders führen.

Grenzflächenbedingung für die magnetische Erregung

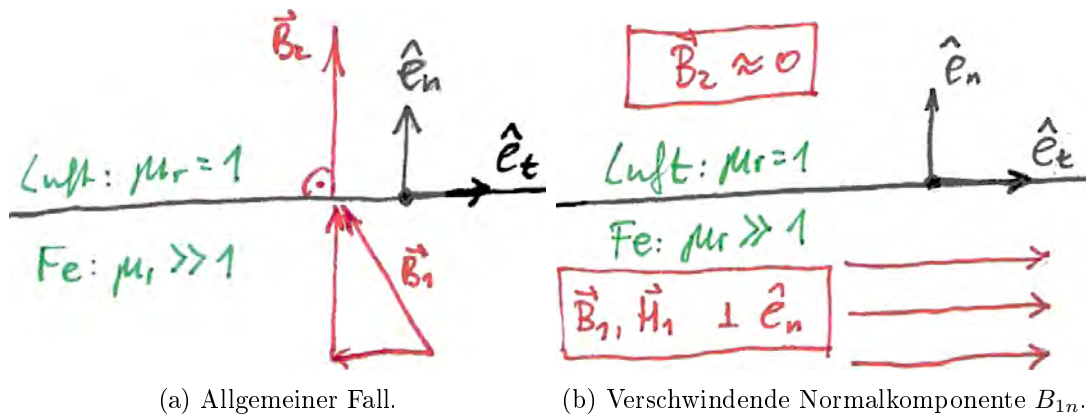
Die Grenzflächenbedingung erhält man am einfachsten per Analogie mit der elektrischen Feldstärke in der Elektrostatik. Aus der Tatsache, dass die elektrische Umlaufspannung verschwindet (2.11.10), hat sich ergeben, dass die Tangentialkomponenten der elektrischen Flussdichte E_{1t} und E_{2t} stetig sind (2.11.16):

$$\dot{U}(\partial\Gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\partial\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{2t} = E_{1t}. \quad (4.5.24)$$

Abb. 4.5.5b zeigt einen geschlossenen Pfad $\partial\Gamma$ der sich beidseitig an die Grenzfläche anschmiegt. Unter der Voraussetzung verschwindender Flächenströme liefert der Durchflutungssatz (4.5.14), dass die magnetische Umlaufspannung verschwindet. Per Analogie müssen die Tangentialkomponenten der magnetischen Erregung H_{1t} und H_{2t} stetig sein:

$$\dot{U}_M(\partial\Gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\partial\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{2t} = H_{1t}. \quad (4.5.25)$$

Einen eigenständigen Beweis könnte man wie in Kapitel 2.11.4 führen.



(a) Allgemeiner Fall.

(b) Verschwindende Normalkomponente B_{1n} .Abbildung 4.5.6: Grenzfläche eines Mediums mit $\mu_{r1} \gg 1$ zu Luft mit $\mu_{r2} = 1$.

Beispiel 4.5.2 (Grenzfläche Eisen – Luft). Abb. 4.5.6a zeigt die Grenzfläche eines hochpermeablen Mediums 1 mit $\mu_{r1} \gg 1$, z.B. Eisen, zu einem Medium 2 mit $\mu_r = 1$, z.B. Luft. Gesucht sind die Normal- und Tangentialkomponenten der Flussdichte an der Grenzschicht in Medium 2.

Mit Hilfe des Flächennormalvektors \hat{e}_n und des Tangentialvektors \hat{e}_t zerlegt man die Felder an der Grenzfläche in ihre jeweiligen Normal- und Tangentialkomponenten:

$$\vec{B}_1 = B_{1t}\hat{e}_t + B_{1n}\hat{e}_n, \quad (4.5.26)$$

$$\vec{B}_2 = B_{2t}\hat{e}_t + B_{2n}\hat{e}_n. \quad (4.5.27)$$

Die Stetigkeitsbedingung (4.5.23) liefert unmittelbar

$$B_{2n} = B_{1n}. \quad (4.5.28)$$

Die Stetigkeitsbedingung (4.5.25) und das Materialgesetz (4.5.19) führen auf

$$H_{2t} = H_{1t}, \quad (4.5.29)$$

$$\frac{1}{\mu_2} B_{2t} = \frac{1}{\mu_1} B_{1t}, \quad (4.5.30)$$

$$B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t} \approx 0 \quad \text{für } \mu_{r2} \ll \mu_{r1}. \quad (4.5.31)$$

Die Flussdichte tritt aus dem hochpermeablen Material näherungsweise senkrecht aus.

Abb. 4.5.6b zeigt den Spezialfall, dass die Flussdichte im Eisen tangential zur Grenzfläche verläuft, $B_{1n} = 0$. Wegen (4.5.30) und (4.5.31) gilt in der Luft

$$B_{1n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B_{2n} = 0, \\ B_{2t} \approx 0. \end{cases} \quad (4.5.32)$$

Die Flussdichte in der Luft ist vernachlässigbar; der magnetische Fluss wird vom hochpermeablen Material geführt.

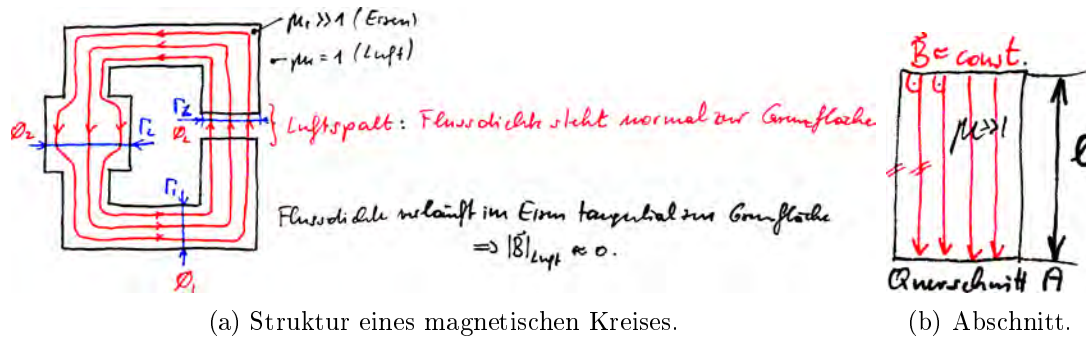


Abbildung 4.6.1: Magnetkreis mit mehreren hochpermeablen Abschnitten und wohldefiniertem Luftspalt.

4.6 Der magnetische Kreis

Bsp. 4.5.2 hat gezeigt, dass hochpermeable Stoffe den tangential zu einer Grenzfläche verlaufenden magnetischen Fluss führen. Dies ermöglicht die Konstruktion magnetischer Kreise mit wohldefinierten Luftspalten. Abb. 4.6.1a zeigt eine typische Anordnung: einen hochpermeablen Kern mit Luftspalt.

Der Magnetkern besteht aus mehreren zylindrischen Abschnitten (d.h. konstanten Querschnitts). Für die einzelnen Abschnitte rechnet man mit mittleren Längen; Inhomogenitäten der Flussdichte an den Grenzflächen einzelner Abschnitte werden üblicherweise vernachlässigt.

4.6.1 Ohmsches Gesetz des Magnetismus: Reluktanz

Definition 4.6.1 (Magnetischer Widerstand, Reluktanz R_M). Für einen unverzweigten Magnetpfad mit konstantem Fluss der Proportionalitätsfaktor zwischen dem magnetischen Fluss ϕ und der magnetischen Spannung U_m :

$$R_M : \quad U_M = R_M \Phi. \quad (4.6.1)$$

Im Vergleich mit dem klassischen Ohmschen Gesetz für stationäre Ströme entspricht die magnetische Spannung U_M der elektrischen Spannung U , und der magnetische Fluss Φ entspricht dem elektrischen Strom I .

Beispiel 4.6.1 (Reluktanz eines hochpermeablen Zylinders). Abb. 4.6.1b zeigt einen in z -Richtung weisenden zylindrischen Abschnitt der Länge l und der Querschnittsfläche A . Seine Permeabilität ist homogene und sehr hoch, $\mu \gg \mu_0$, und seine Mantelflächen sind von Luft mit $\mu = \mu_0$ umgeben.

Die Flussdichte tritt senkrecht auf die Deckfläche ein bzw. auf die Grundfläche aus. Daher ist die Flussdichte axial ausgerichtet und homogen, und der magnetische Fluss Φ ist für jeden Querschnitt derselbe:

$$\vec{B} = B \hat{e}_z = \text{const.} : \quad \Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{\Gamma} = \int_A B \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z d\Gamma = BA. \quad (4.6.2)$$

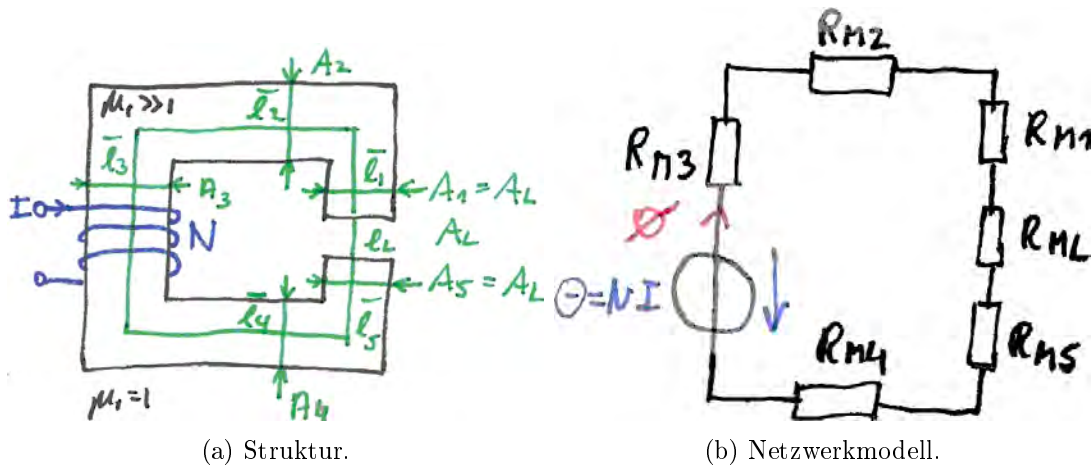


Abbildung 4.6.2: Unverzweigter Magnetkreis: Längs eines Umlaufs ist der magnetische Fluss auf allen Querschnitten konstant.

Für die magnetische Spannung U_M längs der Zylinderachse folgt somit

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} B \hat{e}_z = \text{const.} : \quad U_m = \int_{\mathcal{L}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_0^l \frac{1}{\mu} B \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z dz = \frac{1}{\mu} Bl, \quad (4.6.3)$$

$$U_m = \left(\frac{l}{\mu A} \right) \Phi. \quad (4.6.4)$$

Somit gilt für die Reluktanz

$$R_M = \frac{l}{\mu A}. \quad (4.6.5)$$

4.6.2 Der unverzweigte Magnetkreis: Maschenregel

Abb. 4.6.2 zeigt einen Magnetkreis, der aus einem hochpermeablen Kern und einem Luftspalt besteht. Der Kern setzt sich aus Abschnitten zusammen, die jeweils durch ihre mittlere Länge l_i , ihren Querschnitt A_i und ihre Permeabilität $\mu_i \gg \mu_0$ beschrieben werden. Der Luftspalt hat die Länge l_L und den Querschnitt A_L . Das Magnetfeld wird durch eine vom Gleichstrom I durchflossene Wicklung mit N Windungen erregt.

Die magnetische Flussdichte wird im hochpermeablen Material geführt und tritt normal zum Kernquerschnitt in den Luftspalt ein. Für die Anordnung ist kennzeichnend, dass der magnetische Fluss Φ längs eines geschlossenen Umlaufs durch beliebige Querschnitte derselbe ist:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_5 = \Phi_L = \text{const} = \Phi. \quad (4.6.6)$$

Man spricht von einem unverzweigten Magnetkreis mit dem Maschenfluss Φ .

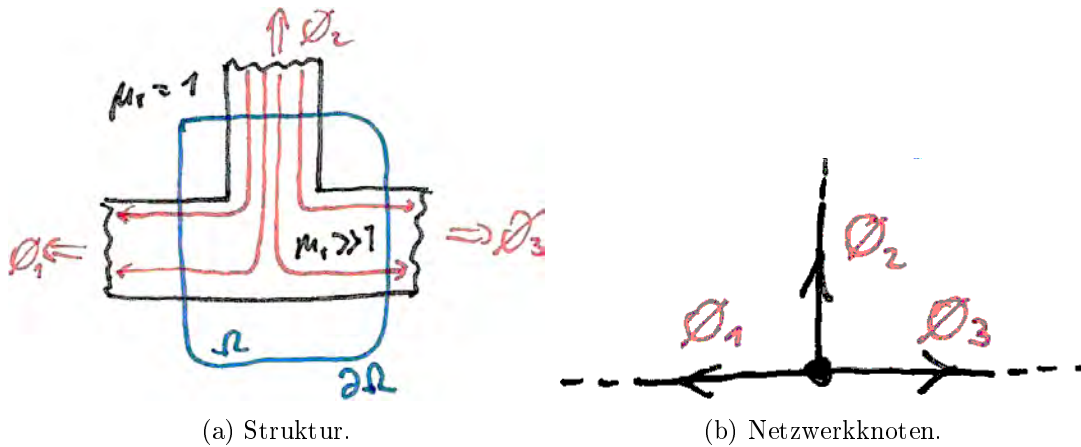


Abbildung 4.6.3: Verzweigung eines Magnetkerns. Der magnetische Fluss wird in den hochpermeablen Pfaden geführt.

Der Durchflutungssatz (4.5.14)

$$\Theta = Ni = \dot{U}_M = \sum_i U_{M,i} \tag{4.6.7}$$

entspricht der Kirchhoffschen Maschenregel, wobei die Durchflutung Θ der elektrischen Quellspannung entspricht, und die magnetischen Spannungen die elektrischen ersetzen. Einsetzen der Reluktanz (4.6.1) unter Berücksichtigung der Konstanz des Maschenflusses führt auf

$$\Theta = \sum_i (R_{M,i} \Phi_i) = \left(\sum_i R_{M,i} \right) \Phi_i \quad \text{mit } R_{M,i} = \frac{l_i}{\mu_i A_i}. \tag{4.6.8}$$

Diese Gesetzmäßigkeit ist von der Serienschaltung elektrischer Widerstände bereits bekannt.

4.6.3 Verzweigungen: Knotenregel

Abb. 4.6.3a zeigt eine Verzweigung eines in Luft eingebetteten Magnetkerns aus hochpermeablen Material. Der magnetische Fluss wird im Magnetmaterial geführt, während die Flussdichte in der Luft näherungsweise verschwindet.

Allgemein betrachten wir die magnetisch leitfähige Verbindung von N Magnetpfaden mit den Flüssen Φ_1, \dots, Φ_N . Die Zählfeilrichtungen für die Flüsse mögen der Einfachheit wegen von der Verbindung weg gewählt sein. Schließt man die Verbindung in ein Gebiet Ω ein, so schneidet die Berandung $\partial\Omega$ die Magnetpfade $\partial\Omega$ mit den nach außen fließenden Flüssen Φ_i . Der in der Luft liegende Teil der Berandung befindet sich im feldfreien Raum.

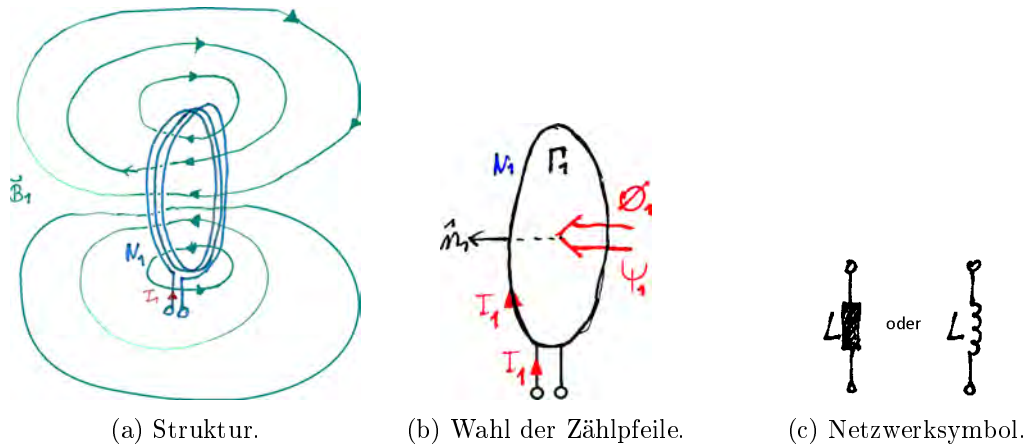


Abbildung 4.7.1: Selbstinduktivität einer Spule.

Die magnetische Flussbilanz (4.3.15) liefert die Beziehung

$$\dot{\Phi}(\partial\Omega) = 0 = \sum_i \Phi_i. \quad (4.6.9)$$

Sie entspricht der Kirchhoffschen Knotenregel für elektrische Netzwerke. Abb. 4.6.3b zeigt das entsprechende magnetische Netzwerk: Die Verzweigung wird als Netzwerkknoten dargestellt.

4.7 Induktivitätsbegriffe

4.7.1 Spulenfluss und Selbstinduktivität

Abb. 4.7.1a zeigt eine Spule mit N_1 Windungen. Der durch den Strom I_1 erregte Fluss durchsetzt die Fläche, die von allen N_1 Windungen aufgespannt wird. Die folgenden Festlegungen dienen der Quantifizierung dieses Zusammenhangs:

Definition 4.7.1 (Spulenfluss ψ). Der mit dem gesamten Strompfad verkettete magnetische Fluss. Das ist der Fluss durch die von allen Windungen der Spule aufgespannte Gesamtfläche.

Für eine Spule mit N Windungen, die von demselben Windungsfluss Φ durchsetzt werden, gilt

$$\psi = N\Phi. \quad (4.7.1)$$

Im linearen Fall sind die magnetische Flussdichte und in der Folge die Windungsflüsse und der Spulenfluss dem Leiterstrom proportional. Das Verhältnis zwischen dem Leiterstrom und dem Spulenfluss durch die von ihm durchflossene Spule hängt von der Geometrie und dem Material ab und ist eine das Bauteil kennzeichnende Größe.

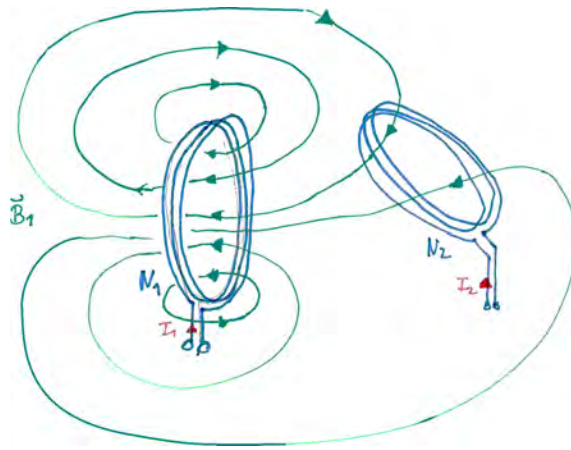


Abbildung 4.7.2: Zwei magnetisch verkoppelte Leiterschleifen (Spulen).

Definition 4.7.2 (Selbstinduktivität L). Das Verhältnis von Spulenfluss zu Leiterstrom in derselben Leiterschleife (Spule):

$$L : \quad \psi = LI. \quad (4.7.2)$$

Die Selbstinduktivität wird in Henry (H) gemessen:

$$[L] = \frac{\text{Wb Vs}}{\text{A A}} =: \text{H}. \quad (4.7.3)$$

Die Selbstinduktivität wird stets positiv angegeben. Wie in Abb. 4.7.1b angedeutet, bedeutet dies, dass die Zählpfeilrichtungen für den Strom und den Spulenfluss nicht unabhängig von einander sind:

- Geht man von einer beliebigen Wahl der Orientierung der Fläche und damit der Zählpfeile für den Windungs- und den Spulenfluss aus, so ist der Zählpfeil für den Strom im Sinne einer Rechtsschraube zu wählen.
- Geht man von einer beliebigen Wahl des Zählpfeils für den Strom aus, so sind die Zählpfeile für den Windungs- und den Spulenfluss im Sinne einer Rechtsschraube zu wählen.

4.7.2 Gegeninduktivität

Abb. 4.7.2 zeigt eine Anordnung zweier Leiterschleifen (Spulen). Der durch den Leiterstrom I_1 hervorgerufene magnetische Fluss durchsetzt zum Teil auch die Leiterschleife der Spule 2.

Definition 4.7.3 (Gegeninduktivität M). Das Verhältnis des Spulenflusses $\psi_2(I_1)$ durch die stromlose Schleife 2 zum Leiterstrom durch die Schleife I_1 :

$$M_{21} : \quad \psi_2(I_1) = M_{21}I_1 \quad \text{für } I_2 = 0. \quad (4.7.4)$$

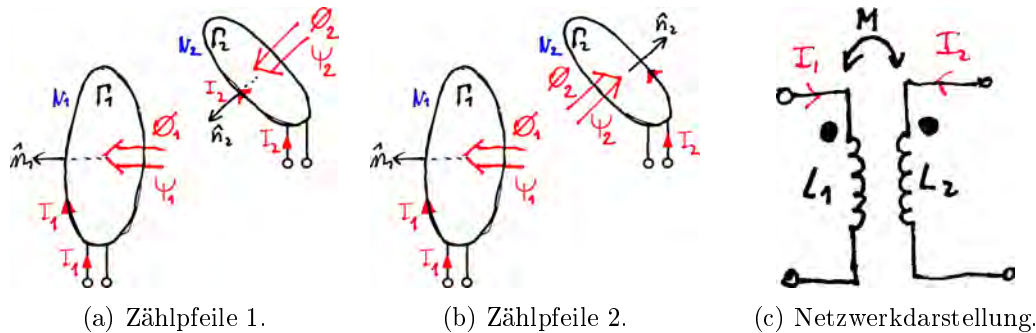


Abbildung 4.7.3: Wahl der Zählpfeile und Vorzeichen der Gegeninduktivität.

Damit beschreibt die Gegeninduktivität M_{21} den mit der Leiterschleife 2 verketteten Fluss zufolge I_1 . Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen (reziproke Materialeigenschaften) gilt

$$M_{21} = M_{12} =: M. \quad (4.7.5)$$

Es ist daher üblich, die Gegeninduktivität ohne Indizes anzugeben. Die Gegeninduktivität quantifiziert die Verkopplung zweier magnetischer Kreise. Sie hängt nicht nur von Geometrie und Material der beteiligten Leiterschleifen (Spulen) ab, sondern auch von ihrer Position zueinander und der Wahl der Zählpfeile. Je nachdem, ob sich die Magnetfelder von jeweils in Zählpfeilrichtung fließender Ströme gegenseitig verstärken oder schwächen, weist die Gegeninduktivität positives oder negatives Vorzeichen auf.

Beispiel 4.7.1 (Vorzeichen der Gegeninduktivität). Abb. 4.7.3a und Abb. 4.7.3b unterscheiden sich in der Wahl des Zählpfeils für den Leiterstrom I_2 und in der Folge in den Zählpfeilen für den Windungsfluss Φ_2 und den Spulenfluss ψ_2 . Der Strom I_1 möge in Zählpfeilrichtung fließen, die Leiterschleife 2 sei stromlos.

Bei der gegebenen Anordnung der Spulen ist davon auszugehen, dass der resultierende Spulenfluss $\psi_2(I_1)$ durch die Schleife 2 in Abb. 4.7.3a positives Vorzeichen und in in Abb. 4.7.3b negatives Vorzeichen aufweisen wird.

Abb. 4.7.3c zeigt die Netzwerkdarstellung zweier verkoppelter Spulen unter Angabe der Selbstinduktiviten und der Gegeninduktivität der Anordnung. Man beachte die schwarzen Punkte am einen Ende jeder Induktivität. Sie legen das Vorzeichen der Gegeninduktivität gemäß der folgenden Vereinbarung fest:

- Wählt man die Stromzählpfeile jeweils von der benachbarten Klemme in Richtung des schwarzen Punktes, so gilt das angegebene Vorzeichen der Gegeninduktivität.

Für einen positiven Wert der Gegeninduktivität bedeutet dies, dass sich die Magnetfelder der Ströme I_1 und I_2 verstärken.

4.8 Energie im magnetischen Feld

Ohne Herleitung sei angegeben, dass die räumliche Energiedichte des magnetischen Feldes w_m durch

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (4.8.1)$$

gegeben ist. In einem Gebiet Ω beträgt die magnetische Energie \mathcal{E}_m daher

$$\mathcal{E}_m = \int_{\Omega} w_m d\Omega \stackrel{(4.8.1)}{=} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{H} \cdot \vec{B} d\Omega. \quad (4.8.2)$$

Für die Energie einer Induktivität L mit dem Leiterstrom I gilt

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L I^2, \quad (4.8.3)$$

und für zwei verkoppelte Induktivitäten L_1 und L_2 mit der Gegeninduktivität M und den Leiterströmen I_1 und I_2 erhält man

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2. \quad (4.8.4)$$

Man erkennt, dass sich die Energie im unverkoppelten Fall auf jene der beiden Teilsysteme vereinfacht, und dass die Verkopplung durch Feldverstärkung bzw. -schwächung die Energie vergrößern ($M > 0$) oder verkleinern ($M < 0$) kann.

Kapitel 5

Transiente Magnetfelder

5.1 Allgemeines

Im Folgenden steht t für die Zeit. In der Elektrotechnik kennzeichnet man zeitabhängige Spannungen und Ströme in der Regel durch Kleinbuchstaben: $u(t)$ und $i(t)$. Bei Feldgrößen ist Kleinschreibung wenig üblich.

Abb. 5.1.1 zeigt eine Fläche Γ , die von einem zeitlich veränderlichen (= transienten) Spulenfluss $\psi(\Gamma; t)$ durchsetzt wird. Die Erfahrung zeigt, dass eine elektrische Feldstärke \vec{E}_i induziert wird, die längs der Kontur $\partial\Gamma$ eine EMK gemäß

$$\text{EMK}(\partial\Gamma; t) = \oint_{\partial\Gamma} \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\psi(\Gamma; t) \quad (5.1.1)$$

zur Folge hat: Die induzierte EMK gleicht dem zeitlichen Schwund des verketteten magnetischen Flusses. Man erkennt, dass im Gegensatz zum elektrostatischen Feld die Zirkulation der induzierten elektrischen Feldstärke nicht verschwindet: Sie besitzt Wirbel! Sie besitzt Wirbel!

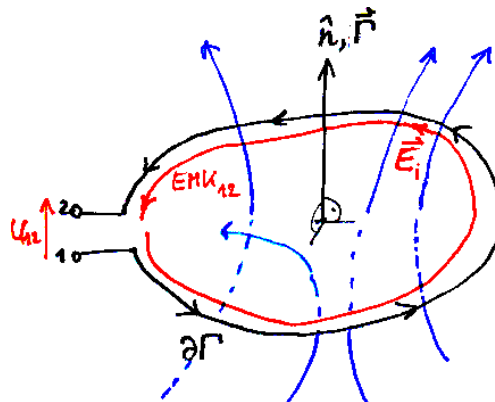


Abbildung 5.1.1: Zeitlich veränderlicher magnetischer Fluss, induzierte EMK und Klemmenspannung.

Die Zeitabhängigkeit des Spulenflusses $\psi(\Gamma, t)$ setzt sich im Allgemeinen aus zwei Anteilen zusammen:

- Ruheinduktion: durch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld $\vec{B}(t)$ durch eine zeitlich unveränderliche Leiterschleife.
- Bewegungsinduktion: durch eine zeitliche veränderliche Leiterschleife $\partial\Gamma(t)$ in einem zeitlich unveränderlichen Magnetfeld.

5.1.1 Wirbelströme, Lenzsche Regel, Stromverdrängung

Ist das von einem zeitabhängigen magnetischen Feld durchsetzte Gebiet elektrisch leitfähig, so fließen aufgrund der induzierten elektrischen Feldstärke Wirbelströme. Nach der *Lenzschen Regel* sind diese stets so gerichtet, dass sie ihrer Ursache entgegenwirken.

Technische Anwendungen sind die Wirbelstrombremse und der Induktionsofen. Oftmals ist die Ausbildung von Wirbelströmen unerwünscht: Als Abhilfe baut man die Magnetkerne von Transformatoren aus einer Vielzahl dünner Bleche, die gegeneinander isoliert sind; weiterhin mengt man Transformatoreisen zur Verringerung der Leitfähigkeit Silizium bei.

Nach der Lenzschen Regel bilden sich im Inneren von Leitern Wirbelströme so aus, dass sie der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses und damit (Durchflutungssatz!) auch jener des verketteten Stroms entgegenwirken. Hierdurch dringt elektrischer Strom mit steigender Frequenz immer weniger in das Innere massiver Leiter ein; er fließt in einer dünnen werdenden Schicht an der Oberfläche. Man spricht vom Effekt der Stromverdrängung. Nachteilig ist, dass sich hierdurch der elektrische Widerstand vergrößert. Im Gegenschluss lässt sich im hochfrequenten Fall der Widerstand eines Leiters durch Aufbringen einer dünnen und damit billigen hochleitfähigen Schicht, z.B. Silber, deutlich absenken. Auch das Polieren der Oberfläche verringert den Widerstand, weil es die Länge des Strompfads verringert. Von Vorteil ist, dass magnetische Wechselfelder durch nicht-magnetische $\mu_r \approx 1$, aber elektrische gut leitfähige Stoffe, wie Aluminium, geschirmt werden können.

5.1.2 Leerlaufspannung

Wie in Abb.5.1.1 dargestellt, beruhen viele technische Anwendungen auf Leiterschleifen mit Klemmen außerhalb des Magnetfeldes liegen. Die vom zeitabhängige Fluss induzierte Feldstärke \vec{E}_i bewirkt in der Leiterschleife eine EMK und in der Folge Ladungstrennung. Die getrennten Ladungen bauen ein Coulombfeld \vec{E}_C auf. Ein Gleichgewicht zwischen \vec{E}_C und \vec{E}_i ein, wenn im EMK-Bereich die Gesamtfeldstärke im Leiterinneren verschwindet,

$$\vec{E}_C = -\vec{E}_i \quad \text{im Leiter im EMK-Bereich.} \quad (5.1.2)$$

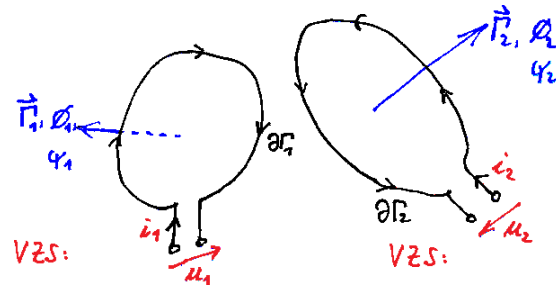


Abbildung 5.2.1: Induktion in verkoppelten Magnetkreisen.

Außerhalb des EMK-Bereichs gibt es nur das Coulombfeld. Daher gilt für die Klemmenspannung $u_{12}(t)$ im Leerlauf, d.h. im stromfreien Fall,

$$u_{12}(t) = -\text{EMK}(\partial\Gamma) = +\frac{d}{dt}\psi(\Gamma; t). \quad (5.1.3)$$

Fließt Strom, so führt die endliche Leitfähigkeit der Leiterschleife zu einem Spannungsabfall. Diesen Innenwiderstand der Quelle berücksichtigt man durch einen Serienwiderstand entsprechender Größe.

5.2 Ruheinduktion

Dies ist der Fall einer zeitlich unveränderlichen Leiterschleife in einem zeitabhängigen Magnetfeld. Für die Leerlaufspannung u_{12} einer Spule mit N Windungen gilt

$$u_{12} = \frac{d}{dt}\psi(\Gamma; t) = N \frac{d}{dt}\Phi(\Gamma; t) = N \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}; t) \cdot d\vec{\Gamma} \stackrel{\Gamma=\text{const}}{=} N \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}; t) \cdot d\vec{\Gamma}. \quad (5.2.1)$$

5.2.1 Selbst- und Gegeninduktion

Abb. 5.2.1 zeigt zwei Leiterschleifen mit den Selbstinduktivitäten L_1 und L_2 , die über die Gegeninduktivität M magnetisch verkoppelt sind. Die Wahl der Zählpfeile für die Spannungen und Ströme erfolgt nach dem Verbraucherzählpeilsystem (VPS).

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Leiterschleife 2 leerläuft ($i_2 = 0$), und die Leiterschleife 1 mit einem zeitabhängigen Strom $i_1(t)$ gespeist wird. Dieser erregt in derselben Stromschleife einen zeitabhängigen Spulenfluss $\psi_1(i_1)$, der an den Klemmen eine Spannung $u_1(t)$ induziert; man spricht von Selbstinduktion. Weiterhin durchsetzt ein Teil des Flusses die Leiterschleife 2. Der zugehörige Spulenfluss $\psi_2(i_1)$ induziert die Spannung $u_2(i_1)$; man spricht von Gegeninduktion.

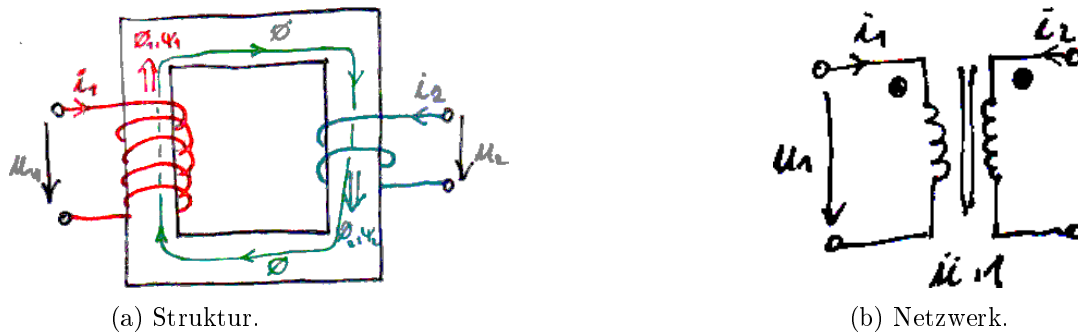


Abbildung 5.2.2: Der ideale Übertrager.

Dabei gilt

$$u_1(i_1) = \frac{d}{dt} \psi_1(i_1) = \frac{d}{dt} (L_1 i_1) \stackrel{L_1 = \text{const}}{=} L_1 \frac{d}{dt} i_1 \quad \dots \text{Selbstinduktion,} \quad (5.2.2a)$$

$$u_2(i_1) = \frac{d}{dt} \psi_2(i_1) = \frac{d}{dt} (M i_1) \stackrel{M = \text{const}}{=} M \frac{d}{dt} i_1 \quad \dots \text{Gegeninduktion.} \quad (5.2.2b)$$

Im Fall, dass die Leiterschleife 1 leerläuft ($i_1 = 0$), und die Leiterschleife 2 mit einem zeitabhängigen Strom $i_2(t)$ gespeist wird, liefern dieselben Überlegungen

$$u_2(i_2) = L_2 \frac{d}{dt} i_2 \quad \dots \text{Selbstinduktion,} \quad (5.2.2c)$$

$$u_1(i_2) = M \frac{d}{dt} i_2 \quad \dots \text{Gegeninduktion.} \quad (5.2.2d)$$

5.2.2 Der ideale Übertrager

Eine wichtige Anwendung der Ruheinduktion ist der Transformator. Seine Idealisierung ist der *ideale Übertrager*, für den die folgenden Vereinfachungen gelten:

1. kein Streufluss;
2. keine Leitungswiderstände;
3. keine magnetischen Verluste;
4. verschwindende Reluktanz ($R_m \approx 0$).

Abb. 5.2.2a zeigt einen idealen Übertrager. Er besteht aus zwei Wicklungen mit N_1 bzw. N_2 Windungen auf einem hochpermeablen Magnetkern. Die Zählpfeile für Spannung und Strom entsprechen dem Verbraucherzählpeilsystem. Weil sich in der dargestellten Struktur die Magnetfelder in Zählfeilrichtung fließender Ströme verstärken, gilt das Netzwerkmodell aus Abb. 5.2.2b. In ihm deutet der Doppelpfeil zwischen den Induktivitäten an, dass die Anordnung einen Magnetkern besitzt.

Spannungsübertragungsverhältnis

Die Vereinfachung 1 besagt, dass der Kern das Magnetfeld vollständig führt. Daher gleicht der magnetische Fluss Φ_1 durch einen beliebigen Querschnitt der Wicklung 1 dem Fluss Φ_2 durch einen beliebigen Querschnitt der Wicklung 2. Es ist daher zulässig, auf den Index zu verzichten:

$$\Phi_1 = \Phi_2 =: \Phi. \quad (5.2.3)$$

Damit lauten die Spulenflüsse ψ_1 und ψ_2 durch die entsprechenden Wicklungen

$$\psi_1 = N_1 \Phi, \quad (5.2.4)$$

$$\psi_2 = N_2 \Phi, \quad (5.2.5)$$

und die Klemmenspannungen ergeben sich zu

$$u_1 = \frac{d}{dt} \psi_1 = N_1 \frac{d}{dt} \Phi, \quad (5.2.6)$$

$$u_2 = \frac{d}{dt} \psi_2 = N_2 \frac{d}{dt} \Phi. \quad (5.2.7)$$

Das Spannungsübersetzungsverhältnis \ddot{u} lautet somit

$$\ddot{u} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (5.2.8)$$

Stromübertragungsverhältnis

Weil nach Vereinfachung 4 die Reluktanz verschwindet, zeigt der Durchflutungssatz angewandt auf einen Umlauf im Magnetkern,

$$\Theta = \sum_i \underbrace{R_{m,i}}_{=0} \Phi, \quad (5.2.9)$$

dass die Gesamtdurchflutung des Kerns verschwindet. Einsetzen der Ströme und Windungszahlen führt auf

$$\Theta = N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0, \quad (5.2.10)$$

$$N_1 i_1 = -N_2 i_2. \quad (5.2.11)$$

Somit beträgt das Stromübertragungsverhältnis

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{\ddot{u}}. \quad (5.2.12)$$

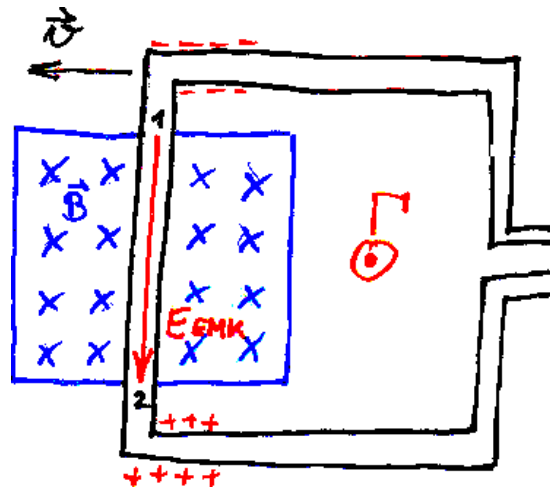


Abbildung 5.3.1: Bewegungsinduktion.

5.3 Bewegungsinduktion

Dies ist der Fall einer zeitlich veränderlichen Leiterschleife im stationären Magnetfeld. Abb. 5.3.1 zeigt eine Leiterschleife, deren Segment 1-2 sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ durch ein stationäres Magnetfeld bewegt.

Die induzierte elektrische Feldstärke \vec{E}_i folgt unmittelbar aus der Lorentzkraft:

$$d\vec{F} = dQ(\vec{v} \times \vec{B}), \quad (5.3.1)$$

$$\frac{d\vec{F}}{dQ} = \vec{v} \times \vec{B}, \quad (5.3.2)$$

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.3.3)$$

Somit erhält man die EMK längs des Segments 1-2 über

$$\text{EMK} = \int_{\text{Leiter1} \rightarrow 2} \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \int_{\text{Leiter1} \rightarrow 2} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}. \quad (5.3.4)$$

Die Klemmenspannung u_{12} lautet daher

$$u_{12} = -\text{EMK} = - \int_{\text{Leiter1} \rightarrow 2} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}. \quad (5.3.5)$$

Die Bewegungsinduktion bildet die Grundlage aller elektrischen Maschinen mit beweglichen Teilen. Hierzu zählen rotierende Motoren und Linearmotoren sowie Generatoren.

Beispiel 5.3.1 (Unipolarmaschine – Barlowsches Rad). Abb.5.3.2 zeigt eine gut leitfähige Kreisscheibe mit Radius R , die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse dreht. Die Scheibe wird in axialer Richtung von einem stationären

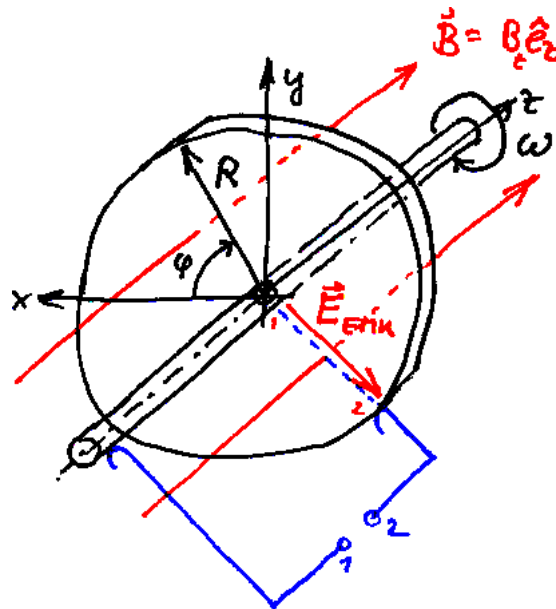


Abbildung 5.3.2: Unipolarmaschine.

homogenen Magnetfeld durchsetzt. Für die Flussdichte gilt $\vec{B} = B_z \hat{e}_z = \text{const.}$. An der Achse ($r \approx 0$ und dem äußeren Scheibenumfang sind Schleifkontakte angebracht. Berechnen Sie die Klemmenspannung allgemein und für

$$B_z = 1 \text{ T}, \quad R = 0.15 \text{ m}, \quad \omega = 50 \cdot 2\pi \text{ rad/s} \quad (3000 \text{ U/min}). \quad (5.3.6)$$

In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) lautet die Umfangsgeschwindigkeit \vec{v}

$$\vec{v} = \omega r \hat{e}_\varphi. \quad (5.3.7)$$

Die induzierte Feldstärke \vec{E}_i beträgt

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} = \omega r B_z \hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z = \omega r B_z \hat{e}_r. \quad (5.3.8)$$

Die EMK und die Spannung u_{12} lauten

$$\text{EMK} = \int_0^R \vec{E}_i \cdot \hat{e}_r dr = \int_0^R \omega r B_z \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r dr = \omega B_z \int_0^R r dr = \frac{1}{2} \omega B_z R^2, \quad (5.3.9)$$

$$u_{12} = -\text{EMK} = -\frac{1}{2} \omega B_z R^2. \quad (5.3.10)$$

Einsetzen der vorgegebenen Werte führt auf

$$u_{12} = -\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0.15^2 \cdot 2\pi \text{ V} \approx -3.53 \text{ V}. \quad (5.3.11)$$

Literaturverzeichnis

- [1] PHYSIKALISCH-TECHNISCHE BUNDESANSTALT: Die gesetzlichen Einheiten in Deutschland. Version: Mai 2016. https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/publikationen/broschueren/Einheiten_deutsch.pdf. Braunschweig und Berlin, D, Mai 2016. – techreport. – Abgerufen: 18.10.2018
- [2] PHYSIKALISCH-TECHNISCHE BUNDESANSTALT: Das neue Internationale Einheitensystem (SI). Version: Nov. 2017. https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/presse_aktuelles/broschueren/intern_einheitensystem/Das_neue_Internationale_Einheitensystem_V2.pdf. Braunschweig und Berlin, D, Nov. 2017. – techreport. – Abgerufen: 21.10.2019
- [3] GÖBEL, E. O. ; SIEGNER, U. : *The New International System of Units (SI) Quantum Metrology and Quantum Standards*. Wiley-VCH, 2019
- [4] PHILIPPOW, E. : *Grundlagen der Elektrotechnik*. 10. Berlin, D : Verlag Technik, 2000. – ISBN 978-3341012413
- [5] PREGLA, R. : *Grundlagen der Elektrotechnik*. 9. Berlin und Offenbach, D : VDE Verlag, 2016. – ISBN 9783800742059