Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Stefan Schuß **Univ. Siegen**

Übungsaufgaben (10)
zur Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ im Wintersemester 2012/2013

(Abgabetermin: Mittwoch, 19.12.2012, 10 Uhr)

Alle Aufgaben sind **Bonusaufgaben**.

32. (**Beispiele für Elemente aus** $C[0,1]'$.) Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen T auf $X := C[0,1]$ linear und stetig sind und berechnen Sie deren Norm:

    a) $T : X \longrightarrow X$, definiert durch $Tf(x) := f(x)g(x)$ mit $g \in X$.

    b) $T : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $Tf := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i)$, wobei $x_i \in [0,1]$ paarweise verschieden und $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

33. (**Adjungierte Abbildung**) Für Hilberträume X, Y und eine beschränkte lineare Abbildung $A \in L(X,Y)$ ist der adjungierte Operator $A^* \in L(Y,X)$ durch

$$(Ax, y)_Y = (x, A^*y)_X \ \forall\, x \in X,\ y \in Y\,,$$

erklärt. A^* ist nach dem Satz von Riesz wohldefiniert, da $(A\cdot, y)_Y$ für jedes $y \in Y$ ein beschränktes lineares Funktional (auf X) ist. Außerdem ist A^* ein beschränkter linearer Operator von Y nach X.

Zeigen Sie für $A : X \longrightarrow Y$,

$$X = \left\{ f \in L^2(0,1) \,|\, f(1) = 0 \right\},\ Y = \left\{ g \in L^2(0,1) \,|\, g(0) = 0 \right\}$$

definiert durch

$$(Af)(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

dass der adjungierte Operator $A^* : Y \longrightarrow X$ gegeben ist durch

$$(A^*g)(x) = \int_x^1 g(t)\, dt\,.$$

- bitte wenden -

34. (**Beispiel für adjungierten Operator**)

a) Sei $(Tf)(s) = \int\limits_0^1 k(s,t)f(t)\,dt$ der Integraloperator $T : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ mit Kern $k \in L^2\left((0,1)^2\right)$. Wie sieht der adjungierte Operator T^* aus?

b) Zeigen Sie, dass ein schwach singulärer Integraloperator mit einem Kern

$$k(s,t) = \begin{cases} \dfrac{r(s,t)}{|s-t|^\alpha} & , s \neq t \\ 0 & , s = t \end{cases}$$

mit stetigen $r \in C\left([0,1]^2\right)$ und $0 < \alpha < 1/2$ der Voraussetzung in a) genügt. Was passiert im Fall $1/2 \leq \alpha < 1$?