Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 5

1. Zeige, dass eine überabzählbare Teilmenge von $\ell^\infty(\mathbb{R})$ existiert, deren Elemente paarweise einen festen, postiven Abstand voneinander haben. Folgere, dass $\ell^\infty(\mathbb{R})$ nicht separabel ist. (3)

Eine Funktion $P : X \to X$ auf einem normierten Vektorraum heißt stetige lineare Projektion, wenn gilt: $P \in \mathcal{L}(X, X)$ und $P \circ P = P$.

2. Es sei X ein normierter Vektorraum und $P : X \to X$ eine stetige lineare Projektion. Zeige:

(i) $P = 0$ oder $||P|| \geq 1$. (1)

(ii) Der Kern $\ker P$ und das Bild $\operatorname{Im} P$ sind abgeschlossene Teilmengen von X. (1)

(iii) Für alle $x \in X$ existieren eindeutige $y \in \ker P$, $z \in \operatorname{Im} P$ mit $x = y + z$. Außerdem gilt: Eine Folge $X \ni x_n = y_n + z_n$, $y_n \in \ker P$, $z_n \in \operatorname{Im} P$ konvergiert in X gegen $x \in X$ genau dann, wenn gilt: $y_n \to y \in \ker P$ und $z_n \to z \in \operatorname{Im} P$. (3)

Bemerkung: In einer solchen Situation schreiben wir $X = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$ und sprechen von einer direkten Zerlegung des Banachraumes X.

3. Sei X ein Hilbertraum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Definiere (4)

$$P : X \to X,\, x \mapsto Px := u,$$

wobei u das eindeutig bestimmte Element aus U ist mit

$$||x - u|| = \inf_{v \in U} ||x - v|| \,.$$

(vgl. Satz 4.9). Zeige, dass P eine stetige lineare Projektion ist und bestimme $||P||$.
Wie sieht die Zerlegung von X nach Aufgabe **2.**(iii) aus?

4. Sei X ein Hilbertraum und $F \in X'$. Zeige, dass für das darstellende Element y aus dem Rieszschen Darstellungssatz gilt: (3)

$$F(x) = (x, y)\ \forall x \in X \iff \varphi(y) = \min_{z \in X} \varphi(z),$$

wobei $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $\varphi(z) = ||z||^2 - 2 \operatorname{Re} F(z)$.

5. Sei X ein reeller Hilbertraum, $A \subset X$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Sei $x \in X \setminus A$. Zeige: Es existiert ein $y \in X$ mit (3)

$$(x, y) < \inf_{a \in A} (a, y).$$

6. Sei M ein kompakter metrischer Raum und $(Y, ||\cdot||)$ ein Banachraum. Es bezeichne $\mathcal{C}(M; Y)$ die Menge der stetigen Funktionen von M nach Y. Für $f \in \mathcal{C}(M; Y)$ definiere (2)

$$||f||_\infty := \sup_{x \in M} ||f(x)|| \,.$$

Zeige, dass $(\mathcal{C}(M; Y), ||\cdot||_\infty)$ ein Banachraum ist.