Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 25.4.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 20

Übungen Elemente der Differenzialgleichungen: Blatt 1

1. *Differenzialgleichungen mit getrennten Veränderlichen.* Bestimme jeweils eine (lokale) Lösung für folgende Anfangswertprobleme mit getrennten Veränderlichen.

(a) $y'(t) = 2y^3(t)$ mit $y(0) = 1$. (2)

(b) $y'(t) = t^3(1 + y^2(t))$ mit $y(0) = 0$. (2)

(c) $y'(t) = e^{-t}\sqrt{1 - y^2(t)}$ mit $y(0) = 0$. (2)

2. *Partikuläre Lösungen raten.* Es ist manchmal möglich eine partikuläre Lösung zu raten ohne eine Variation der Konstanten durchzuführen. Wir betrachten dazu für eine Inhomogenität $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Differenzialgleichung

$$y'(t) + 6y(t) = g(t)$$

(a) Bestimme die allgemeine Form der homogenen Lösung. (1)

(b) Bestimme eine partikuläre Lösung für die folgenden Inhomogenitäten. Mache dazu einen geschickten Ansatz für die partikuläre Lösung und versuche eine Variation der Konstanten zu vermeiden!

(i) $g(t) = t + 3$. (2)

(ii) $g(t) = t^3 + 2t$. (2)

(iii) $g(t) = e^t$. (2)

(iv) $g(t) = \cos t + \sin t$. (2)

Hinweis: Für (i) wähle etwa den Ansatz $y(t) = at + b$.

(c) Bestimme für (i) die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung. (1)

3. *Automatische höhere Regularität von Lösungen.* Man kann oft aus der Struktur der Differenzialgleichung schon Eigenschaften der Lösungen ablesen ohne konkret die Lösungen zu kennen. Wir wollen hierfür ein erstes Beispiel geben.

(a) Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t, y) := p(y)$. Zeige, dass jede Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall) von

$$y'(t) = f(t, y(t)) = p(y(t))$$

schon in $C^\infty(I)$ liegt, d.h. beliebig oft differenzierbar ist. (3)

Hinweis: Versuche zuerst zu zeigen, dass jede Lösung schon stetig differenzierbar ist. Zeige die Aussage der Aufgabe per vollständiger Induktion.

(b) Gebe ein Beispiel für ein $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig so, dass die Gleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt, die nicht beliebig oft differenzierbar ist. (1)