Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2013/14
Punktzahl: 3

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 5

10. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Attraktor des dazugehörigen dynamischen Systems. Wir bezeichnen (1)

$$E(\bar{x}) := \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \text{die Lsg } x \text{ zum AW } x(0) = x_0 \text{ erfüllt } t^+(x_0) = \infty \text{ und } \lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x} \right\}$$

als das *Einzugsgebiet* von $\bar{x}$. Zeige, dass $E(\bar{x})$ eine offene Umgebung von $\bar{x}$ in $\mathbb{R}^n$ ist.

Zur Erinnerung: Ein Gleichgewichtspunkt $\bar{x}$ ist ein *Attraktor*, falls eine Umgebung U von $\bar{x}$ existiert so, dass jede Lösung x mit $x(0) \in U$ für alle Zeiten existiert und $\lim_{t\to\infty} u(t) = \bar{x}$ erfüllt.

11. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt von f. Zeige, dass es dann für jede Umgebung U von $\bar{x}$ eine Umgebung U' von $\bar{x}$ in U gibt so, dass jede Lösung x mit $x(0) \in U'$ für alle $t > 0$ existiert und $x(t) \in U'$ erfüllt. (1)

Bemerkung: Die Definition eines stabilen Gleichgewichtspunktes unterscheidet sich von der oberen Aussage! Zur Erinnerung:

Ein Gleichgewichtspunkt $\bar{x}$ von f heißt stabil, falls es für jede Umgebung U von $\bar{x}$ eine Umgebung U_1 von $\bar{x}$ in U gibt so, dass jede Lösung x mit $x(0) \in U_1$ für alle $t > 0$ existiert und $x(t) \in U$ (hier ist der Unterschied!) erfüllt.

12. Zeige, dass das dynamische System in $\mathbb{R}^2$, dessen Gleichungen in Polarkoordinaten durch (1)

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{r} = \begin{cases} r^4 \sin(1/r), & r > 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

gegeben sind, einen stabilen Gleichgewichtspunkt im Ursprung besitzt, der jedoch kein Attraktor ist.