Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

Lösungen zur Klausur Maßtheorie

1. Kreuzen Sie auf den ersten beiden Seiten des Klausurbogens an, welche der folgenden Behauptungen richtig und welche falsch sind. Für jede korrekt klassifizierte Aussage erhalten Sie einen Punkte, für die übrigen 0 Punkte. Kreuzen Sie deutlich erkennbar genau eine der Alternativen "wahr" oder "falsch" an. (50)

(1) Für den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ gilt:

- ☐ Jede positive Funktion ist messbar.
- ☐ Jede integrierbare Funktion ist beschränkt.
- ☐ Jede stetige und beschränkte Funktion ist integrierbar.
- ☐ Jede überabzählbare Menge gehört zu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- ☒ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält alle Intervalle.
- ☐ Ist $A \cup B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$, so sind auch $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(2) Es sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{S} := \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \Omega\}$, $\Sigma := \sigma(\mathcal{S})$ die von $\mathcal{S}$ erzeugte σ-Algebra sowie $\mu = \delta_1$ das Dirac-Maß in 1. Wir betrachten den Maßraum (Ω, Σ, μ). Dann gilt:

- ☒ $\mathcal{S}$ ist eine monotone Klasse.
- ☐ $\mathcal{S}$ ist ein Dynkin-System.
- ☐ $\{2\}$ ist eine Nullmenge.
- ☐ Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, ist messbar.
- ☐ $\int_\Omega \mathbb{1}_{\{3\}} - \mathbb{1}_{\{4\}} \, \mathrm{d}\mu = 1$.

(3) Wir betrachten den Maßraum $([1, \infty), \mathcal{B}([1, \infty)), \mu)$ mit dem durch

$$\mu(A) := \int_A \frac{1}{x} \, \mathrm{d}\lambda(x) \quad (A \in \mathcal{B}([1, \infty)))$$

gegebenen Maß μ. Dann gilt:

- ☐ Der Maßraum ist endlich.
- ☒ Der Maßraum ist σ-endlich.
- ☒ Die durch $f(x) := \frac{1}{x}$ gegebene Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.
- ☒ $\mu((1, 2)) = \log(2)$.
- ☒ μ ist absolut-stetig bzgl. λ.
- ☒ λ ist absolut-stetig bzgl. μ.
- ☐ Für $f(x) := x\mathbb{1}_{[1,2]}(x)$ ist $\int_{[1,\infty)} f \, \mathrm{d}\mu = 2$.
- ☐ $\sin \in \mathcal{L}^1([1, \infty), \mathcal{B}([1, \infty)), \mu)$.
- ☒ Der Grenzwert $\lim_{N\to\infty} \int_{[1,N]} \sin \, \mathrm{d}\mu$ existiert.

(4) Es sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ☒ Sind f und g messbar, so ist auch $f + g$ messbar.

- ☐ Ist $f + g$ messbar, so auch f und g.
- ☒ Sind f und g messbar, so ist $\{\omega \in \Omega : f^2(\omega) \leq g(\omega)\} \in \Sigma$.
- ☐ Ist f^2 messbar, so ist auch f messbar.
- ☒ Ist f^3 messbar, so ist auch f messbar.
- ☐ Ist f messbar, so ist $\{f(B) : B \in \Sigma\}$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}$.
- ☒ Sind f und g messbar, so ist auch $f\mathbb{1}_{\{g>5\}}$ messbar.
- ☒ Falls $f\mathbb{1}_{\{|f|\leq n\}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ messbar ist, so auch f messbar.
- ☐ Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei f_α eine messbare Funktion. Dann ist auch $\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} f_\alpha$ messbar.

(5) Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda^2)$, wobei λ^2 das Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ bezeichne. Ferner sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion und wir setzen $f_x := f(x, \cdot)$ und $f_y := f(\cdot, y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ☒ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ wird von der Menge aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ erzeugt.
- ☒ $\{(\pi, t) : 8 \leq t < 9\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
- ☒ Es gibt eine überabzählbare Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mit $\lambda^2(A) = 0$.
- ☒ Ist $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ stetig und $\int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\lambda^2 = 0$, so ist $f = 0$ fast überall.
- ☐ $(-\infty, t] \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ für alle $B \subset \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\lim_{n\to\infty} \lambda^2(\mathbb{R} \times [0, 1/n]) = \lambda^2(\mathbb{R} \times \{0\})$.
- ☒ Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $U \neq \emptyset$ ist $\lambda^2(U) > 0$.
- ☐ Ist $f_x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f_y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ für alle $y \in \mathbb{R}$, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda^2)$.
- ☐ Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda^2)$, so ist $f_x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ☒ Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda^2)$, so ist $\int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \,\mathrm{d}\lambda(x)$.
- ☐ Es ist $f_x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $f_y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

(6) Wir betrachten den Maßraum $(\Omega, \Sigma, \mu) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, wobei ν das Zählmaß bezeichne. Es seien $f, f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- ☒ $L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \subset L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$ für $1 < p < q < \infty$.
- ☒ Für alle $1 \leq p < \infty$ besteht $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ aus beschränkten Funktionen.
- ☐ Falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ für alle $x \in \Omega$, so ist $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \infty$.
- ☒ Falls f_n in $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ gegen f konvergiert, so konvergiert eine Teilfolge $f_{n_k}(x)$ gegen $f(x)$ für alle $x \in \Omega$.
- ☒ Die Funktion $g(k) := (-3/4)^k$ ist in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$.
- ☒ Ist $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty f_n(k) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty f_n(k)$.

(7) Für eine Borel-messbare Funktion $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$ sei $\mu := \lambda \circ f^{-1}$ das Bildmaß von λ unter f auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

- ☒ Für $f(x) = x^2$ ist $\mu((0, 1/2)) = 1/\sqrt{2}$.
- ☐ Für $f(x) = x$ ist $\int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}\mu(x) = \infty$.
- ☐ Für $f(x) = \frac{1}{x}$ ist $\int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}\mu(x) = 2$.
- ☒ Für $f = \mathbb{1}_{(1,2)}$ ist $\mu = \delta_0 + \delta_1$.

2. Es sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $\omega \in \Omega$. Wir bezeichnen mit $\mu := \delta_\omega$ das Dirac-Maß in ω, d.h. (15)

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

für alle $A \in \Sigma$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = f(\omega)$$

für alle messbaren Funktionen $f : \Omega \to [0, \infty)$.

Lösung: Es sei zunächst $f : \Omega \to [0, \infty)$ eine einfache messbare Funktion mit Standarddarstellung

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Da $\cup A_j = \Omega$ gibt es genau ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, sodass $\omega \in A_k$. Folglich ist

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\delta_\omega = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_\omega(A_j) = \alpha_k = f(\omega).$$

Nun sei $f : \Omega \to [0, \infty)$ eine beliebige messbare Funktion. Dann gibt es eine Folge $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$ einfacher messbarer Funktionen mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$. Aus dem Satz von Beppo-Levi folgt nun aus der Vorüberlegung, dass

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\delta_0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\delta_0 = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega).$$

Alternativ kann man den Raum auch in $A := f^{-1}(f(\omega))$ und $\Omega \backslash A$ zerlegen. Dann ist f auf A konstant und verschwindet auf $\Omega \backslash A$ fast überall. Somit erhält man unmittelbar, dass

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_{\Omega \backslash A} f \, \mathrm{d}\mu = f(\omega) + 0$$

für jede messbare Funktion $f : \Omega \to [0, \infty)$.

3. Bestimmen Sie folgenden Grenzwert: (15)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]} \frac{1}{3 + \sin(\frac{x}{n}) + x^{2n}} \, \mathrm{d}\lambda(x)$$

Lösung: Mit der Bezeichnung

$$f_n(x) := \frac{1}{3 + \sin(\frac{x}{n}) + x^{2n}}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [-\pi, \pi]$ ist

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} \frac{1}{3} & |x| < 1 \\ \frac{1}{4} & |x| = 1 \\ 0 & x \in [-\pi, -1) \cup (1, \pi] \end{cases}$$

für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Da

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{3 + x^{2n} - |\sin(\frac{x}{n})|} \leq \frac{1}{2}$$

für alle $x \in [-\pi, \pi]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und die konstante Funktion $\frac{1}{2}$ auf $[-\pi, \pi]$ λ-integrierbar ist, folgt aus dem Satz von Lebesgue, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[-\pi,\pi]} f \,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

4. Geben Sie ein Beispiel einer Folge $(f_n) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ derart, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ aber $\|f_n\|_2 \not\to 0$ für $n \to \infty$. (5)

Lösung: Man betrachte z.B. die Funktionen $f_n := \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ oder $f_n := n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$.

5. Wir betrachten die messbare Abbildung $f : [0, \infty) \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, gegeben durch (15)

$$f(x, k) = \frac{e^{-\frac{x}{k}}}{k^2},$$

und bezeichnen mit ν das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Bestimmen Sie den Wert der iterierten Integrale

$$\int_{[0,\infty)} \int_{\mathbb{N}} f(x, k) \,\mathrm{d}\nu(k) \,\mathrm{d}\lambda(x) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{N}} \int_{[0,\infty)} f(x, k) \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\nu(k)$$

und entscheiden Sie, ob f bzgl. des Produktmaßes $\lambda \otimes \nu$ integrierbar ist, d.h. ob $f \in \mathcal{L}^1([0, \infty) \times \mathbb{N}, \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}), \lambda \otimes \nu)$.

Lösung: Es ist

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{[0,\infty)} f(x, k) \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\nu(k) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{e^{-\frac{x}{k}}}{k}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - 0\right) = \infty.$$

Da f positiv ist, folgt aus dem Satz von Tonelli, dass

$$\int_{[0,\infty)\times\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}(\lambda \otimes \nu) = \int_{\mathbb{N}} \int_{[0,\infty)} f(x, k) \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\nu(k) = \int_{\mathbb{N}} \int_{[0,\infty)} f(x, k) \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\nu(k) = \infty.$$

Insbesondere ist f nicht bzgl. $\lambda \otimes \nu$ integrierbar.