Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka

Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 27

## Lösungen Funktionalanalysis 2: Blatt 2

**4.** Sei $V$ ein Hilbertraum, $\emptyset \neq K \subset V$ abgeschlossen und konvex, und sei $P$ die orthogonale Projektion auf $K$. Zeige, dass $P$ genau dann linear ist, wenn $K$ ein Unterraum ist! (2)

**Lösung:** Ist $P$ linear, so ist $K = \operatorname{Rg} P$ ein Unterraum.

Sei nun $K$ ein Unterraum, $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $Px + \alpha Py \in K$ und

$$(x + \alpha y) - (Px + \alpha Py) = (x - Px) + \alpha(y - Py) \in K^\perp,$$

laut Vorlesung also $P(x + \alpha y) = Px + \alpha Py$.

**5.** *Trennungssatz:* Sei $V$ ein Hilbertraum. Eine *Hyperebene* $H$ von $V$ ist ein abgeschlossener affiner Unterraum von Kodimension 1, d.h. es gibt $v_0 \in V$, einen abgeschlossenen Unterraum $U$ von $V$ und einen Vektor $v \in V$ mit $V = U \oplus \operatorname{span}\{v\}$ und $H = v_0 + U$. Zeige:

(a) Eine Menge $H \subset V$ ist genau dann eine Hyperebene von $V$, wenn es $p \in V$, $p \neq 0$, und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $H = \{y \in V : (p \mid y) = \alpha\}$ gibt. (3)

**Lösung:** Sei $H$ eine Hyperebene, $H = v_0 + U$. Wegen $U \neq V$ und $V = U \oplus U^\perp$ gibt es ein $p \neq 0$ in $U^\perp$. Dann ist $U^\perp = \operatorname{span}\{p\}$. Sei $\alpha := (p \mid v_0)$. Ist nun $y \in H$, so ist $y = v_0 + u$ mit $u \in U$ und somit $(p \mid y) = (p \mid v_0) = \alpha$. Ist umgekehrt $(p \mid y) = \alpha$, so ist $(p \mid y - v_0) = 0$. also liegt $u := y - v_0$ in $(U^\perp)^\perp = U$, und man hat $y = v_0 + u \in H$.

Sei nun umgekehrt $p \neq 0$ und $\alpha$ gegeben. Wähle ein $v_0$ mit $(p \mid v_0) = \alpha$, beispielsweise ein Vielfaches von $p$, und $U := \{p\}^\perp$. Dann ist $U$ abgeschlossen mit Kodimension 1 ($v := p$). Ist $(p \mid y) = \alpha$, so ist $y - v_0 \perp p$, also $y \in v_0 + U$. Ist umgekehrt $y \in v_0 + U$, so ist $(p \mid y) = \alpha$.

(b) Ist $H$ eine Hyperebene von $V$, so gibt es offene, disjunkte Mengen $R_1$ und $R_2$ mit $V = R_1 \cup H \cup R_2$, und man nennt $R_1$ und $R_2$ *zu $H$ gehörenden Halbräume.* (1)

**Lösung:** Wähle $p \neq 0$ und $\alpha$ wie oben. Dann setze $R_1 := \{y : (p \mid y) > \alpha\}$ und $R_2 := \{y : (p \mid y) < \alpha\}$.

(c) Ist $K \subset V$ abgeschlossen und konvex und $x_0 \notin K$, so gibt es eine Hyperebene $H$ mit zugehörigen Halbräumen $R_1$ und $R_2$, für die $x_0 \in R_1$ und $K \subset R_2$ gilt. (1)

**Lösung:** Für $p$ und $\varepsilon$ wie im Trennungssatz wähle $\alpha := (p \mid x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$.

(d) Sei $K \subset V$ abgeschlossen und konvex, $x_0 \notin K$, und $Px_0$ die orthogonale Projektion von $x_0$ auf $K$. Falls es genau eine Hyperebene $H = v_0 + U$ mit zugehörigem Halbraum $R$ gibt, für die $Px_0 \in H$ und $K \subset \overline{R}$ gilt, also genau eine *Tangentialebene an $K$ in $Px_0$*, so ist $x_0 - Px_0 \in U^\perp$. (2)

**Lösung:** Wähle $p := x_0 - Px_0$ und $\alpha := (p \mid Px_0)$. Wegen $(x_0 - Px_0 \mid y - Px_0) \leq 0$ für alle $y \in K$ gilt $(p \mid y) \leq (p \mid Px_0) = \alpha$ für alle $y \in K$, was für diese Hyperebene $H$ und den "unteren Halbraum" $R$ die Inklusion $K \subset \overline{R}$ zeigt. Da nach Definition $Px_0 \in H$ gilt, ist wegen Eindeutigkeit $H$ die Tangentialebene. Wegen $U = \{p\}^\perp$ ist $x_0 - Px_0 = p \in \operatorname{span}\{p\} = U^\perp$.

**6.** Sei $X$ ein reeller Vektorraum, $K \subset X$ abgeschlossen und konvex. Zeige:

(a) Eine Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn ihr Epigraph, die Menge $\{(x, y) : y \geq f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}$, konvex ist. (2)

**Lösung:** Sei $S$ der Epigraph von $f$. Ist $f$ konvex, so ist für $(x_1, y_1) \in S$ und $(x_2, y_2) \in S$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2,$$

also $\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in S$.
Sei umgekehrt $S$ konvex. Zu $x_1, x_2 \in K$ ist $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ mit $y_1 := f(x_1)$ und $y_2 := f(x_2)$. Wegen $\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in S$ ist dann

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2.$$

(b) Ist $f\colon K \to \mathbb{R}$ konvex mit $a \leq f(x) \leq b$ für $x \in K$ und ist $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend, so ist $g \circ f$ konvex. (2)

**Lösung:** Es ist

$$g(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \leq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda)g(f(y)).$$

Beachte hierbei, dass auch $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ in $[a, b]$ liegt.

(c) Ist $f\colon K \to \mathbb{R}$ konvex und existiert $c := \min_{x\in K} f(x)$, so ist $\{x \in K : f(x) = c\}$ konvex. (1)

**Lösung:** Sei $f(x) = f(y) = c$. Dann ist

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = c,$$

also $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = c$.

**7.** Sei $X$ ein Banachraum, $K \subset X$ abgeschlossen und konvex. Eine Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ heißt (schwach) unterhalb halbstetig, falls für $x_n \in K$ aus $x_n \to x$ ($x_n \rightharpoonup x$) $f(x) \leq \liminf f(x_n)$ folgt. Zeige:

(a) Ist $K$ kompakt und $f$ unterhalb halbstetig, so nimmt $f$ ein globales Minimum an. (2)

**Lösung:** Sei $c := \inf_K f$, $(x_n)$ eine minimierende Folge, oBdA. $x_n \to x \in K$. Dann ist $f(x) \leq \liminf f(x_n) = c$, also $f(x) = c$.

(b) Ist $X$ reflexiv, $K$ beschränkt und $f$ schwach unterhalb halbstetig, so nimmt $f$ ein globales Minimum an. (2)

**Lösung:** Sei $c := \inf_K f$, $(x_n)$ eine minimierende Folge, oBdA. $x_n \rightharpoonup x \in K$. Dann ist $f(x) \leq \liminf f(x_n) = c$, also $f(x) = c$.

(c) Eine konvexe Funktion $f$ ist genau dann unterhalb halbstetig, wenn sie schwach unterhalb halbstetig ist. (2)

**Lösung:** Ist $f$ schwach unterhalb halbstetig, so natürlich auch unterhalb halbstetig, unabhängig von Konvexität.
Sei $f$ unterhalb halbstetig. Dann ist $M_\alpha := \{f \leq \alpha\}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ abgeschlossen und konvex, also auch schwach abgeschlossen. Wie in der Vorlesung folgt daraus, dass $f$ schwach unterhalb halbstetig ist.

**8.** *Bilinearformen:* Sei $V$ ein normierter Raum und $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear. Zeige:

(a) $a$ ist genau dann stetig, wenn es ein $c \geq 0$ mit $|a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|$ für alle $u, v \in V$ gibt. Ist $a$ stetig, so bezeichnet $\|a\|$ das kleinste $c$ mit dieser Eigenschaft. (2)

**Lösung:** Ist $a$ stetig, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(u,v)| \le 1$ für $\|u\|, \|v\| \le \delta$. Dann ist für $u, v \neq 0$

$$|a(u,v)| = \Big|\frac{\|u\|\|v\|}{\delta^2} a\Big(\frac{\delta u}{\|u\|}, \frac{\delta v}{\|v\|}\Big)\Big| \le \frac{1}{\delta^2}\|u\|\|v\|.$$

Gibt es umgekehrt so ein $c \ge 0$, und gelte $u_n \to u$ und $v_n \to v$, so ist

$$\begin{aligned} |a(u_n,v_n) - a(u,v)| &\le |a(u_n,v_n) - a(u_n,v)| + |a(u_n,v) - a(u,v)| \\ &\le c\|u_n\|\|v_n - v\| + c\|u_n - u\|\|v\| \to 0. \end{aligned}$$

(b) Es gilt $\|a\| = \sup\{|a(u,v)| : \|u\| \le 1, \|v\| \le 1\}$. (2)

**Lösung:** Für stetiges $a$ gilt $|a(u,v)| \le \|a\|$ für $\|u\| \le 1$ und $\|v\| \le 1$, für unstetiges $a$ ist in dieser Richtung nichts zu zeigen.

Für die andere Ungleichung sei $c < \sup\{|a(u,v)| : \|u\| \le 1, \|v\| \le 1\} \in [0,\infty]$. Wähle $u$ und $v$ mit $\|u\| \le 1$, $\|v\| \le 1$ und $|a(u,v)| > c$. Dann ist $|a(u,v)| \not\le c\|u\|\|v\|$, also $\|a\| \ge c$.

(c) Ist $a$ positiv und symmetrisch, so ist $u \mapsto a(u) \coloneqq a(u,u)$ konvex. (3)

**Lösung:** Für $u, v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} a(u+v) &= a(u) + 2a(u,v) + a(v) \le a(u) + 2\sqrt{a(u)}\sqrt{a(v)} + a(v) \\ &= (\sqrt{a(u)} + \sqrt{a(v)})^2, \end{aligned}$$

was für $u = \lambda x$ und $v = (1-\lambda)y$ die Ungleichung

$$\sqrt{a(\lambda x + (1-\lambda)y)} \le \lambda\sqrt{a(x)} + (1-\lambda)\sqrt{a(y)}$$

zeigt, also die Konvexität von $x \mapsto \sqrt{a(x)}$. Wegen $\sqrt{a(x)} \ge 0$ und weil $t \mapsto t^2$ auf $[0,\infty)$ konvex und monoton wachsend ist, ist dann auch $x \mapsto a(x)$ konvex.