Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Übungen Elemente der Topologie: Blatt 2

4. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass

$$\mathscr{T} := \{O \subset M : \forall x \in O\ \exists \varepsilon > 0\ B(x, \varepsilon) \subset O\}$$

eine Topologie von M ist und dass die Menge der offenen Kugeln in M eine Basis dieser Topologie ist! (2)

5. Für $x, y \in \mathbb{R}$ definiere $d_1(x, y) := |x - y|$ und $d_2(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Zeige:

(a) Die Abbildungen d_1 und d_2 sind Metriken auf $\mathbb{R}$. (2)

(b) Die Metriken d_1 und d_2 sind äquivalent, d.h. sie erzeugen dieselbe Topologie. (2)

6. Skizziere die Einheitskugeln von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$! Zeige zudem, dass die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, äquivalent sind! (2)

7. Zeige, dass $(\mathrm{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ und $(\mathrm{C}[0, 1], \|\cdot\|_1)$ normierte Räume sind! Sind die Normen äquivalent? (2)