Universität Ulm

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Jonas Unger

Optimierung mit Differenzialgleichungen

Sommersemester 2012

Übungsblatt 4 - Abgabe: 15.05.2012 (in der Übung)

Aufgabe 1. Nullsteuerbare Menge (4 Punkte)

Gegeben ist der lineare Steuerprozess

$$\dot{x} + ax = u(t), \quad t \in [0, T]$$
$$x(0) = x_0$$

mit $|u(t)| \leq c$ ($c \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest) für alle $t \in [0, T]$. Bestimmen Sie für $a > 0$ und $a < 0$ alle nach Null steuerbaren Anfangszustände.

Aufgabe 2. Adjungierte Differentialgleichung und Bedeutung der adjungierten Variablen (12 Punkte)

Es sei wie in Kapitel 2

$$A : [0, T] \to R^{n \times n}$$

eine stückweise stetige Funktion, und

$$\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

sei irgendeine Fundamentalmatrix der homogenen Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{1}$$

Für die Fundamentalmatrix Φ gilt: $\det\Phi(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$. Daher existiert die Inverse $\Phi(t)^{-1}$ ebenfalls für alle $t \in [0, T]$.

(a) Zeigen Sie, dass für beliebiges $v \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $(v^T \Phi(t)^{-1})^T$ eine Lösung der sogenannten adjungierten Differentialgleichung $x = -A(t)^T x$ darstellt.

Wir betrachten nun das Funktional

$$F(x) = g(x(T)),$$

mit einer differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die vom Endzustand der Lösung $x(\cdot)$ der Differentialgleichung (1) mit den Anfangswerten $x(0) = x_0$ abhängt. Von nun an sei ausserdem $\Phi(t)$ die Übergangsmatrix.

(b) Schreiben Sie $F(x)$ mit Hilfe der Übergangsmatrix. Bestimmen Sie damit die Ableitung (also den Gradienten) von F nach den Anfangswerten, also $\frac{\partial F(x)}{\partial x_0}$.

Wir definieren nun die adjungierte Variable λ als Lösung der adjungierten Differentialgleichung mit vorgegebenen Endwerten, also

$$-\dot{\lambda} = A(t)^T \lambda, \quad \lambda(T) = w. \tag{2}$$

(c) Zeigen Sie, dass man den Gradienten aus Teil (b) mit Hilfe der adjungierten Variablen ausdrücken kann, und zwar als $\frac{\partial F(x)}{\partial x_0} = \lambda(0)^T$. Wie ist die Endbedingung w zu wählen, damit diese Beziehung gültig ist?

(d) Ein konkretes Beispiel: Aus Aufgabe 2 (Übungsblatt 2) kennen wir die Lösung der dortigen Differentialgleichung (1) zu beliebigen Anfangswerten $x(0) = x_0$. Als Funktional wählen wir

$$F(x) = x_1(T).$$

Berechnen Sie $\frac{\partial F(x)}{\partial x_0}$ direkt. Lösen Sie auch die adjungierte Differentialgleichung (2) (Resultate aus Aufgabe 2 (Übungsblatt 2) benutzen), und geben Sie $\lambda(0)$ an.