Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2017/2018
Blatt 14
10.02.2018

Angewandte Numerik 2

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 12.02.2018 bis 16.02.2018

Für dieses Übungsblatt gibt es 8 Theorie- und 18 Matlab-Punkte, sowie 6 Theorie- und 14 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Somit sind für das Bestehen der Vorleistung insgesamt **143 Theorie- und 155 Matlabpunkte** nötig.

Bitte melden Sie sich bis **spätestens Montag, 19.02.2018** zur Vorleistung an. Die Anmeldung ist bereits jetzt möglich.

Prüfungstermine:

Herr Professor Urban bietet (auch für andere Vorlesungen) am Dienstag, 27.02.2018, am Freitag, 16.03.2018, am Dienstag, 03.04.2018 und am Freitag, 06.04.2018 jeweils um 8:00 Uhr, 8:45 Uhr, 9:30 Uhr, 10:15 Uhr, 11:00 Uhr und um 11:45 Uhr Termine für mündliche Prüfungen an. Die Termine können bei Frau Hildebrand, Telefon (0731) 50-23536, reserviert werden.

Aufgabe 48 *(Programmieraufgabe: Galerkin-Verfahren mit Hutfunktionen)*

(2T+6T+8M+6M+4M Punkte)

Für das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x), \qquad x \in (0,1) \qquad \text{mit } u(0) = u(1) = 0 \tag{1}$$

soll numerisch eine Näherungslösung berechnet werden.
Zur Diskretisierung führen wir auf $[0,1]$ ein äquidistantes Gitter

$$\Delta_h := \left\{ x_i \;\middle|\; x_i = ih;\ i = 0, \ldots, m;\ h = \frac{1}{m} \right\}$$

ein. Als Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ ($N = N_h = m-1$) für den diskreten Raum V_h sollen die mit diesem Gitter Δ_h durch

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i < x \le x_{i+1}, \\ 0, & \textit{sonst}, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N,$$

definierten Hut-Funktionen φ_i verwendet werden.

a) Wie lautet die Steifigkeitsmatrix A_N des linearen Gleichungssystems $A_N u_N = f_N$?
   Hinweis: Vergleichen Sie Aufgabe 47, Teil c) des letzten Übungsblatts 13.

b) Berechnen Sie zunächst auf dem Papier die Komponenten der rechten Seite f_N des linearen Gleichungssystems mittels Quadratur. Verwenden Sie hierzu

   i) die Mittelpunktregel und
   ii) die Trapezregel.

   Hinweis:
   Wenden Sie bei der Berechnung der i-ten Komponente f_i die jeweilige Quadraturformel auf das Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ und das Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ getrennt an. Die Komponenten f_i hängen von f ab.

c) Schreiben Sie ein Matlab-Programm zur Berechnung einer Näherungslösung des obigen Randwertproblems (1) mit dem Galerkin-Verfahren. Berechnen Sie dabei die rechte Seite f_N mit der Mittelpunktregel wie in Aufgabenteil b), mit der Trapezregel wie in Aufgabenteil b) und mit der Matlab-Funktion `integral`.

d) Testen Sie Ihr Programm für verschiedene f:

   i) $f(x) = 1,$ exakte Lösung: $u(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x,$
   ii) $f(x) = \sin(\pi x),$ exakte Lösung: $u(x) = \frac{1}{\pi^2}\,\sin(\pi x),$
   iii) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases},$ exakte Lösung: $u(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{7}{8}x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}, & \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$

   Zeichnen Sie dabei jeweils in ein Schaubild die drei Näherungslösungen für die verschiedenen Berechnungen der rechten Seite sowie die exakte Lösung. Verwenden Sie jeweils mehrere unterschiedliche Dimensionen N des diskreten Raumes V_h. Insbesondere auch $N = 10$ und $N = 11$.

e) Plotten Sie jeweils den Fehler und interpretieren Sie Ihre Schaubilder.

Aufgabe 49 *(Programmieraufgabe: Galerkin-Verfahren mit Trigonometrischen Funktionen)*
(6T*+6M*+4M*+4M* Punkte)

Wir betrachten wieder das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x), \qquad x \in (0,1) \qquad \text{mit } u(0) = u(1) = 0.$$

Allerdings verwenden wir als Basis für den diskreten Raum V_h jetzt die Funktionen $\varphi_k(x) = \sin(k\pi x)$, $x \in [0,1]$, $k = 1, \dots, N$.

a) Berechnen Sie die Einträge der Steifigkeitsmatrix zunächst auf dem Papier.
   Hinweis: Es gilt

   i) $\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}\,(\cos(x-y) + \cos(x+y))$ und
   ii) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$.

b) Schreiben Sie ein Matlab-Programm zur Berechnung einer Näherungslösung des obigen Randwertproblems mit dem Galerkin-Verfahren. Verwenden Sie dabei als Basisfunktionen die Funktionen $\varphi_k(x) = \sin(k\pi x)$, $x \in [0,1]$, $k = 1, \dots, N$.

c) Testen Sie Ihr Programm wieder für die verschiedenen f aus Aufgabe 48 und zeichnen Sie die Näherungslösung und die exakte Lösung jeweils für verschiedene N. Sie dürfen zur Berechnung der rechten Seite f_N die Matlab-Funktion `integral` verwenden.

d) Plotten Sie jeweils den Fehler und interpretieren Sie Ihre Schaubilder.

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein. Senden Sie **spätestens 24 Stunden vor Ihrem Tutorium** alle Matlab-Files und alle Ergebnisse in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt14** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de**.