ulm university universität uulm

Prof. Dr. Stefan Wewers
Christian Steck
Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 5

Algebraische Zahlentheorie

Die Besprechung erfolgt am Mittwoch, dem 20.11.2013,
um 14:00 Uhr in O28 - 2003.

Aufgabe 1 (5)

Zeigen Sie den *Stickelbergerschen Diskriminantensatz*: Die Diskriminante d_K eines Zahlkörpers K erfüllt stets $d_K \equiv 0,\, 1 \pmod 4$.

Aufgabe 2 (5)

Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ und $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ der Ganzheitsring. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a} = (3, 1+\sqrt{-5})$ kein Hauptideal ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Norm von $\mathfrak{a}$.

Aufgabe 3 (5+5)

Sei K ein Zahlkörper und $\mathcal{O}_K$ der Ganzheitsring. Zeigen Sie:

(a) Ein Hauptideal $(\alpha) \lhd \mathcal{O}_K$ ist genau dann ein Primideal, wenn α ein Primelement von $\mathcal{O}_K$ ist.

(b) Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \lhd \mathcal{O}_K$ Ideale und $\mathfrak{p} \lhd \mathcal{O}_K$ ein Primideal. Dann gilt:

$$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{p} \mid \mathfrak{a} \text{ oder } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}$$

Aufgabe 4 (5)

Sei K ein Körper und L ein Integritätsring, welcher K als Unterkörper enthält. Sei zudem L/K algebraisch, d.h. jedes Element $\alpha \in L$ ist algebraisch über K. Zeigen Sie: Es ist L bereits ein Körper.